

Ejercicio 3.1. (Equivalencia lógica) Demostrar las equivalencias lógicas que aparecen en la transparencia 2 del tema 3:

1. Idempotencia: $F \vee F \equiv F$
 $F \wedge F \equiv F.$
2. Conmutatividad: $F \vee G \equiv G \vee F ;$
 $F \wedge G \equiv G \wedge F.$
3. Asociatividad: $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H ;$
 $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H.$
4. Absorción: $F \wedge (F \vee G) \equiv F ;$
 $F \vee (F \wedge G) \equiv F.$
5. Distributividad: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H) ;$
 $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H).$
6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F.$
7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G ;$
 $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G.$

Ejercicio 3.2. (Equivalencia lógica) Para cada uno de los siguientes pares de fórmulas, decidir si son o no equivalentes:

1. $A \rightarrow B \rightarrow C$ y $A \wedge B \rightarrow C$
2. $A \rightarrow (B \wedge \neg C)$ y $A \rightarrow B \rightarrow C$
3. $\neg(A \leftrightarrow B)$ y $A \leftrightarrow \neg B$

Ejercicio 3.3. (Formas normales) Para cada una de las siguientes fórmulas, determinar si están en FNC, en FND, en ambas o en ninguna de las dos.

1. $(p \vee q) \wedge (r \vee \neg p) \wedge s.$
2. $p \vee q \vee s.$
3. $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \rightarrow s).$
4. $t \vee q \vee r \wedge s.$

Ejercicio 3.4. (Cálculo de formas normales) Para cada una de las siguientes fórmulas

1. $\neg(p \leftrightarrow q \rightarrow r).$
2. $\neg(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \vee r).$
3. $(p \rightarrow r \vee s) \wedge (r \rightarrow s) \wedge \neg(p \rightarrow s).$

(a) Calcular una FNC, decidir si es o no una tautología y determinar, en su caso, todos sus contramodelos.

(b) Calcular una FND, decidir si es o no satisfacible y determinar, en su caso, todos sus modelos.

Ejercicio 3.5. (Cálculo de formas normales) Empleando una FNC o bien una FND, según consideres más adecuado, decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$1. \{p \leftrightarrow q, q \vee s\} \models s \rightarrow p.$$

$$2. p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p.$$

Ejercicio 3.6. (FND y tablas de verdad) Determinar una FNC y una FND de la fórmula F cuya tabla de verdad es la siguiente:

p	q	r	F
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Ejercicio 3.7. (Examen 1999–2000) Probar, mediante forma normal conjuntiva, que la fórmula

$$(p \rightarrow \neg q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

es una tautología

Ejercicio 3.8. (Examen 2000–01) Decidir, utilizando formas normales, si la fórmula

$$(p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \wedge (r \rightarrow \neg q)$$

es insatisfactible o una tautología.

Ejercicio 3.9. (Examen 2002–03) Utilizando una forma normal, probar que

$$\neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t)$$

es satisfactible.

Ejercicio 3.10. (Examen 2003–04) Probar, usando formas normales, que la fórmula

$$(E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$$

es una tautología.

Ejercicio 3.11. (Examen 2004–05) Sea F la fórmula $p \vee q \leftrightarrow \neg r$. Calcular una forma normal conjuntiva de F y, a partir de ella, determinar los contramodelos de F y decidir si F es una tautología.

Ejercicio 3.12. (Examen 2004–05) Calcular una forma normal conjuntiva de la fórmula F sabiendo que está compuesta con las tres variables p , q y r y que, para toda valoración v , se tiene que

$$v(F) = \begin{cases} 1, & \text{si } v(p) = v(\neg q \vee r) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejercicio 3.13. (Examen 2004–05) Calcular una forma normal disyuntiva de A y una forma normal conjuntiva de $\neg A$ siendo A la fórmula cuya tabla de verdad es

p	q	r	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Ejercicio 3.14. (Examen 2004–05) Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Sean G_1 una forma normal disyuntiva de F_1 y G_2 una forma normal disyuntiva de F_2 . Si F_1 y F_2 son equivalentes, entonces G_1 y G_2 son fórmulas iguales.
2. Para toda fórmula F se tiene que si G_1 es una forma normal conjuntiva de F y G_2 es una forma normal normal disyuntiva de F , entonces G_1 y G_2 son fórmulas distintas.