Lógica informática (2005–06)

Tema 4: Tableros semánticos

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

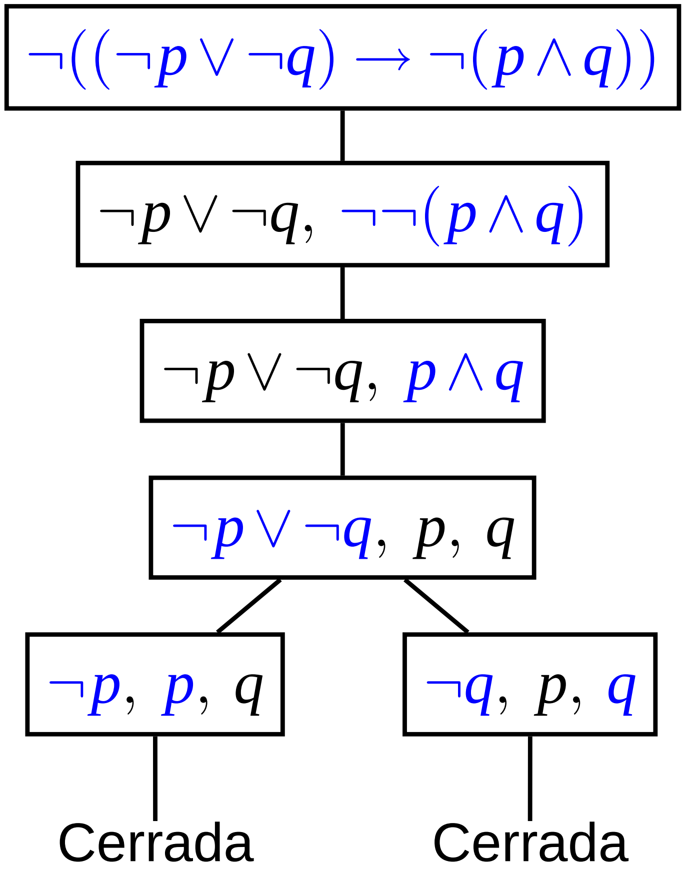
Demostración de fórmula tautológica

- Demostración de $\models \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$.

$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$ es una tautología
syss $\{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))\}$ es inconsistente
syss $\{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge q)\}$ es inconsistente
syss $\{\neg p \vee \neg q, p \wedge q\}$ es inconsistente
syss $\{p, q, \neg p \vee \neg q\}$ es inconsistente
syss $\{p, q, \neg p\}$ es inconsistente y
$\{p, q, \neg q\}$ es inconsistente

Demostración por tableros semánticos

- Tablero semántico cerrado:



Refutación de fórmula no tautológica

- Refutación $\not\models \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$:

  $\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$ es una tautología
  syss $\{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))\}$ es inconsistente
  syss $\{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge r)\}$ es inconsistente
  syss $\{\neg p \vee \neg q, p \wedge r\}$ es inconsistente
  syss $\{p, r, \neg p \vee \neg q\}$ es inconsistente
  syss $\{p, r, \neg p\}$ es inconsistente y
  $\{p, r, \neg q\}$ es inconsistente

- Contramodelos de $\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$:

  Las valoraciones v tales que $v(p) = 1, v(q) = 0$ y $v(r) = 1$.

- Una forma normal disyuntiva de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$:

  $p \wedge r \wedge \neg q$

Refutación por tableros semánticos

- Tablero semántico:

$$\neg((\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land r))$$

$$\neg p \lor \neg q,\ \neg\neg(p \land r)$$

$$\neg p \lor \neg q,\ p \land r$$

$$\neg p \lor \neg q,\ p,\ r$$

$\neg p,\ p,\ r$	$\neg q,\ p,\ r$
Cerrada	Abierta

Notación uniforme: Literales y dobles negaciones

- Literales
  - Un literal es un átomo o la negación de un átomo (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \ldots$).
- Dobles negaciones
  - F es una doble negación si es de la forma $\neg\neg G$.
  - Ley de doble negación: Si F es $\neg\neg G$, entonces $F \equiv G$.

Notación uniforme: fórmulas alfa y beta

- Las fórmulas alfa, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

- Si F es una fórmula alfa con componentes F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \wedge F_2$.
- Las fórmulas beta, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

- Si F es una fórmula beta y con componentes F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \vee F_2$.

Tablero del conjunto de fórmulas S

- El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta S es un tablero de S.
- Sea $\mathscr{T}$ un tablero de S y S_1 la etiqueta de una hoja de $\mathscr{T}$.

1. Si S_1 es cerrado (es decir, que contiene una fórmula y su negación), entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con `cerrado` es un tablero de S.
2. Si S_1 es abierto (es decir, es un conjunto de literales que no es cerrado), entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con `abierto` es un tablero de S.
3. Si S_1 contiene una doble negación $\neg\neg F$, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$ es un tablero de S.
4. Si S_1 contiene una fórmula alfa F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$ es un tablero de S.
5. Si S_1 contiene una fórmula beta F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de S_1 los nodos etiquetados con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1\}$ y $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_2\}$ es un tablero de S.

Teorema por tableros

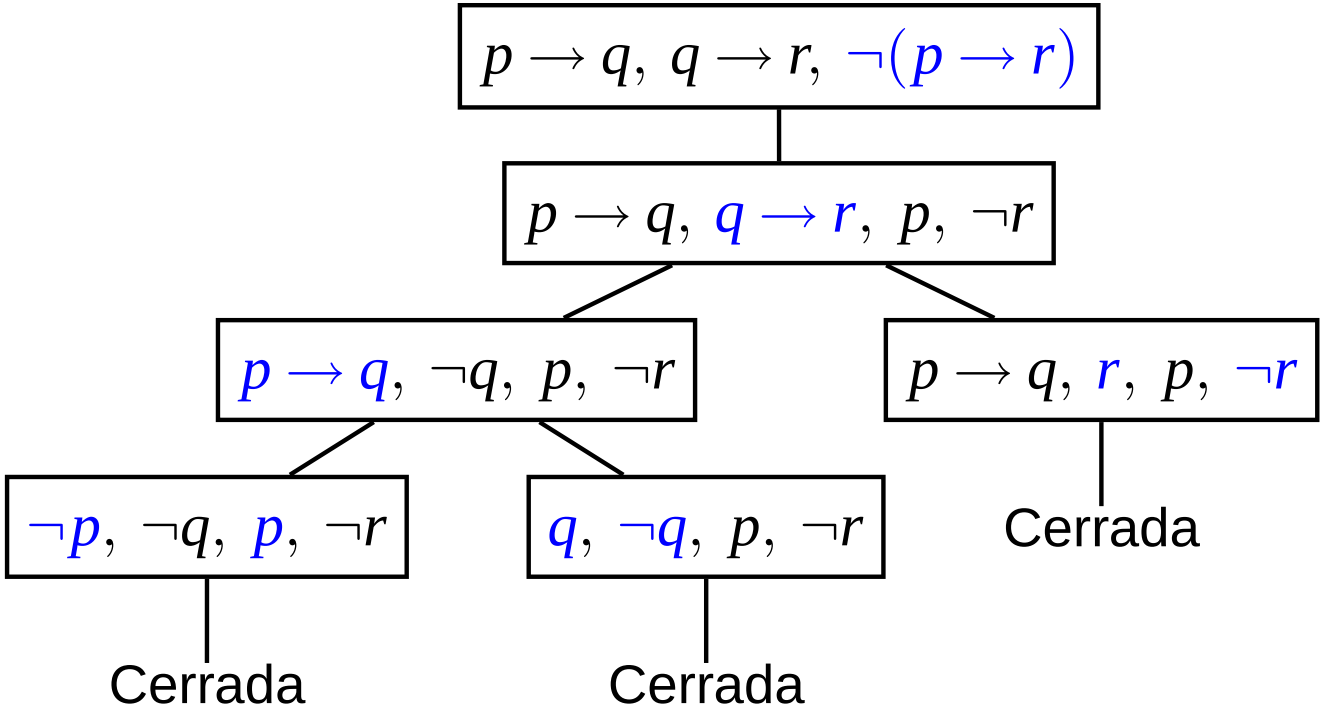
- Def.: Un tablero completo de S es un tablero de S tal que todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- Def.: Un tablero es cerrado si todas sus hojas son cerradas.
- Def.: Una fórmula F es un teorema (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si $\{\neg F\}$ tiene un tablero completo cerrado. Se representa por $\vdash_{Tab} F$.
- Ejemplos: $\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$
  $\nvdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$
- Teor.: El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,

  Adecuado: $\vdash_{Tab} F \quad \Longrightarrow \quad \models F$

  Completo: $\models F \quad \Longrightarrow \quad \vdash_{Tab} F$
- Si los nodos abiertos de un tablero completo de F son
  $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$,
  entonces una forma normal disyuntiva de F es
  $(L_{1,1} \wedge \dots \wedge L_{1,n_1}) \vee \dots \vee (L_{m,1} \wedge \dots \wedge L_{m,n_m})$.

Deducción por tableros

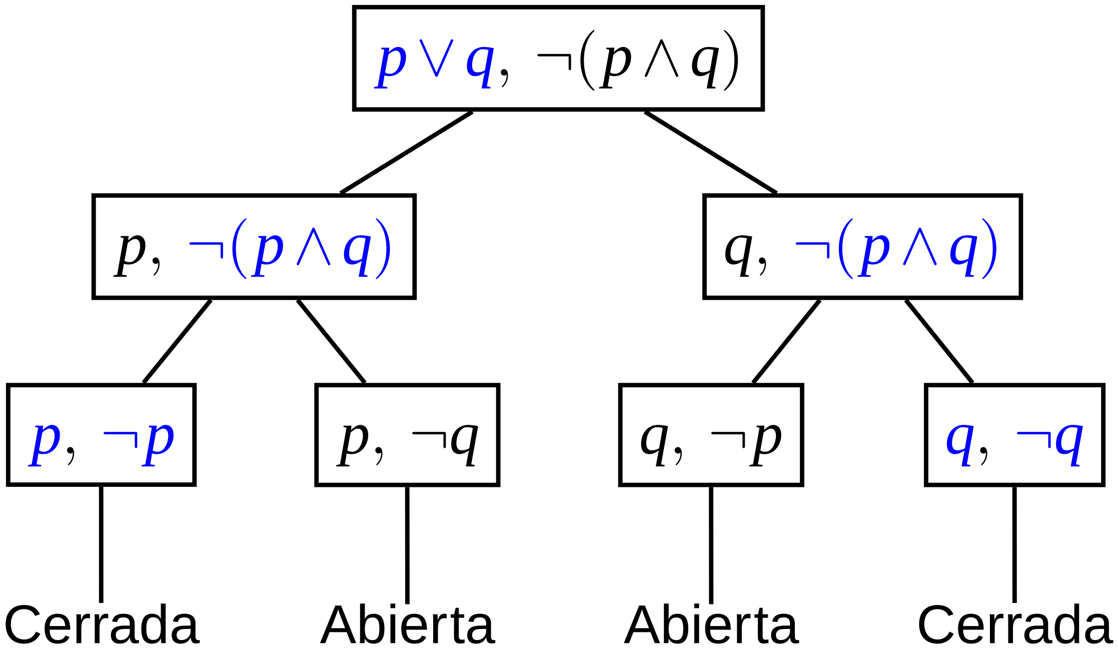
- Def.: La fórmula F es deducible (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas S si existe una prueba mediante tableros de F a partir de S; es decir, existe un tablero completo cerrado de $S \cup \{\neg F\}$.
  Se representa por $S \vdash_{Tab} F$.
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$



- Teor.: $S \vdash_{Tab} F$ syss $S \models F$.

Deducción por tableros

- Ejemplo: $\{p \vee q\} \nvdash_{Tab} p \wedge q$



- Contramodelos de $\{p \vee q\} \nvdash_{Tab} p \wedge q$

  las valoraciones v_1 tales que $v_1(p) = 1$ y $v_1(q) = 0$

  las valoraciones v_2 tales que $v_2(p) = 0$ y $v_2(q) = 1$

Bibliografía

1. Ben–Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)

   Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux

2. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)

   Cap. 3: Semantic tableaux and resolution

3. Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)

   Cap. 7.9: Tableaux semánticos para la lógica de proposiciones

4. Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)

   Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus

5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

   Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas