Lógica informática (2005–06)

Tema 5: Resolución proposicional

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Lógica clausal: sintaxis

- Un átomo es una variable proposicional.
  Variables sobre átomos: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$.
- Un literal es un átomo (p) o la negación de un átomo ($\neg p$).
  Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$.
- Una cláusula es un conjunto finito de literales.
  Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$.
- La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.
  La cláusula vacía se representa por $\square$.
- Conjuntos finitos de cláusulas.
  Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$.

Lógica clausal: semántica

- Def.: Una valoración de verdad es una aplicación $v : \mathrm{VP} \to \mathbb{B}$.
- Def.: El valor de un literal positivo p en una valoración v es $v(p)$.
- Def.: El valor de un literal negativo $\neg p$ en una valoración v es

$$v(\neg p) = \begin{cases} 1, & \text{si } v(p) = 0; \\ 0, & \text{si } v(p) = 1. \end{cases}$$

- Def.: El valor de una cláusula C en una valoración v es

$$v(C) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } L \in C \text{ tal que } v(L) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Def.: El valor de un conjunto de cláusulas S en una valoración v es

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si para toda } C \in S, v(C) = 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Prop.: En cualquier valoración v, $v(\square) = 0$.

Cláusulas y fórmulas

- Equivalencias entre cláusulas y fórmulas
  - Def.: Una cláusula C y una fórmula F son equivalentes si $v(C) = v(F)$ para cualquier valoración v.
  - Def.: Un conjunto de cláusulas S y una fórmula F son equivalentes si $v(S) = v(F)$ para cualquier valoración v.
  - Def.: Un conjunto de cláusulas S y un conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son equivalentes si, para cualquier valoración v, $v(S) = 1$ syss v es un modelo de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
- De cláusulas a fórmulas
  - Prop.: La cláusula $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ es equivalente a la fórmula $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$.
  - Prop.: El conjunto de cláusulas $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ es equivalente a la fórmula $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$.

De fórmulas a cláusulas (forma clausal)

- Def.: Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas equivalente a F.
- Prop.: Si $(L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{m,1} \vee \ldots \vee L_{m,n_m})$ es una forma normal conjuntiva de la fórmula F. Entonces, una forma clausal de F es $\{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}, \ldots, \{L_{m,1}, \ldots, L_{m,n_m}\}\}$.
- Ejemplos:
  - Una forma clausal de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $\{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}\}$.
  - Una forma clausal de $p \rightarrow q$ es $\{\{\neg p, q\}\}$.
  - La cláusula $\{\{\neg p, q\}, \{r\}\}$ es una forma clausal de las fórmulas $(p \rightarrow q) \wedge r$ y $\neg\neg r \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$.
- Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equivalente a S.
- Prop.: Si $S_1, \ldots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \ldots, F_n$, entonces $S_1 \cup \ldots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \ldots, F_n\}$.

Modelos, consistencia y consecuencia

- Def.: Una valoración v es modelo de un conjunto de cláusulas S si $v(S) = 1$.
- Ej.: La valoración v tal que $v(p) = v(q) = 1$ es un modelo de $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.
- Def.: Un conjunto de cláusulas es consistente si tiene modelos e inconsistente, en caso contrario.
- Ejemplos:
  - $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$ es consistente.
  - $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ es inconsistente.
- Prop.: Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
- Def.: $S \models C$ si para todo modelo v de S, $v(C) = 1$.

Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

- Prop: Sean $S_1,\dots,S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1,\dots,F_n$.
  - $\{F_1,\dots,F_n\}$ es consistente syss $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es consistente.
  - Si S es una forma clausal de $\neg G$, entonces son equivalentes
    1. $\{F_1,\dots,F_n\} \models G$.
    2. $\{F_1,\dots,F_n \neg G\}$ es inconsistente.
    3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$ syss
  $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}\}$ es inconsistente.

Regla de resolución

- Reglas habituales:

Modus Ponens: $$\frac{p \rightarrow q, \quad p}{q} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{p\}}{\{q\}}$$

Modus Tollens: $$\frac{p \rightarrow q, \quad \neg q}{\neg p} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}}$$

Encadenamiento: $$\frac{p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q, r\}}{\{\neg p, r\}}$$

- Regla de resolución proposicional:

$$\frac{\{p_1, \dots, r, \dots, p_m\}, \quad \{q_1, \dots, \neg r, \dots, q_n\}}{\{p_1, \dots, p_m, q_1, , \dots, q_n\}}$$

Regla de resolución

- Def.: Sean C_1 una cláusula, L un literal de C_1 y C_2 una cláusula que contiene el complementario de L. La resolvente de C_1 y C_2 respecto de L es

$$\text{Res}_L(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$$

- Ejemplos:

$$\begin{aligned}
\text{Res}_q(\{p,q\},\{\neg q,r\}) &= \{p,r\} \\
\text{Res}_q(\{q,\neg p\},\{p,\neg q\}) &= \{p,\neg p\} \\
\text{Res}_p(\{q,\neg p\},\{p,\neg q\}) &= \{q,\neg q\} \\
\text{Res}_p(\{q,\neg p\},\{q,p\}) &= \{q\} \\
\text{Res}_p(\{p\},\{\neg p\}) &= \square
\end{aligned}$$

- Def.: $\text{Res}(C_1, C_2)$ es el conjunto de las resolventes entre C_1 y C_2
- Ejemplos:

$$\begin{aligned}
\text{Res}(\{\neg p,q\},\{p,\neg q\}) &= \{\{p,\neg p\},\{q,\neg q\}\} \\
\text{Res}(\{\neg p,q\},\{p,q\}) &= \{\{q\}\} \\
\text{Res}(\{\neg p,q\},\{q,r\}) &= \emptyset
\end{aligned}$$

- Nota: $\square \notin \text{Res}(\{p,q\},\{\neg p,\neg q\})$

Ejemplo de refutación por resolución

- Refutación de $\{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$:

1	$\{p,q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p,q\}$	Hipótesis
3	$\{p,\neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p,\neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

Demostraciones por resolución

- Sea S un conjunto de cláusulas.
- La sucesión $(C_1, \ldots, C_n)$ es una demostración por resolución de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
  - $C_i \in S$;
  - existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
- La cláusula C es demostrable por resolución a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S.
- Una refutación por resolución de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S.
- Se dice que S es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de S.

Demostraciones por resolución

- Def.: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y
  S una forma clausal de $\neg F$

  Una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.
- Def.: La fórmula F es demostrable por resolución a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
  Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.
- Ejemplo: Demostración por resolución de $p \land q$ a partir de $\{p \lor q, p \leftrightarrow q\}$

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

Adecuación y completitud de la resolución

- Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
- Si $\Box \in S$, entonces S es inconsistente.
- Si el conjunto de cláusulas S es refutable, entonces S es inconsistente.
- Teor.: El cálculo de resolución es adecuado y completo; es decir,

Adecuado:	$S \vdash_{Res} F$	$\Longrightarrow$	$S \models F$
Completo:	$S \models F$	$\Longrightarrow$	$S \vdash_{Res} F$

Argumentación y resolución

- Problema de los animales: Se sabe que
  1. Los animales con pelo y los que dan leche son mamíferos.
  2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
  3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
  4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

  Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.
- Formalización:

$$
\begin{array}{ll}
\{ & \text{tiene\_pelos} \lor \text{da\_leche} \to \text{es\_mamífero}, \\
 & \text{es\_mamífero} \land (\text{tiene\_pezuñas} \lor \text{rumia}) \to \text{es\_ungulado}, \\
 & \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_cuello\_largo} \to \text{es\_jirafa}, \\
 & \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \to \text{es\_cebra}, \\
 & \text{tiene\_pelos} \land \text{tiene\_pezuñas} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \; \}
\end{array}
$$

$$\vdash_{Res} \text{es\_cebra}$$

Argumentación y resolución

1	{¬ tiene_pelos, es_mamífero}	Hipótesis
2	{¬ da_leche, es_mamífero}	Hipótesis
3	{¬es_mamífero, ¬tiene_pezuñas, es_ungulado}	Hipótesis
4	{¬es_mamífero, ¬rumia, es_ungulado}	Hipótesis
5	{¬es_ungulado, ¬tiene_cuello_largo, es_jirafa}	Hipótesis
6	{¬es_ungulado, ¬tiene_rayas_negras, es_cebra}	Hipótesis
7	{tiene_pelos}	Hipótesis
8	{tiene_pezuñas}	Hipótesis
9	{tiene_rayas_negras}	Hipótesis
10	{¬es_cebra}	Hipótesis
11	{es_mamífero}	Resolvente de 1 y 7
12	{¬tiene_pezuñas, es_ungulado}	Resolvente de 11 y 3
13	{es_ungulado}	Resolvente de 12 y 8
14	{¬tiene_rayas_negras, es_cebra}	Resolvente de 13 y 6
15	{es_cebra}	Resolvente de 14 y 9
16	□	Resolvente de 15 y 10

Bibliografía

1. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001).

   Cap. 4: Propositional calculus: resolution and BDDs.

2. C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973).

   Cap. 5.2: The resolution principle for the proposicional logic.

3. N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001).

   Cap. 14: La resolución en el cálculo proposicional.

4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003).

   Cap. 5.7: El principio de resolución en lógica proposicional.

5. U. Schöning *Logic for Computer Scientists* (Birkäuser, 1989).

   Cap. 1.5: Resolution.