

Ejercicio 6.1. Determinar las variables libres y ligadas de las siguientes fórmulas:

1. $\exists x \exists z [P(x, y) \rightarrow P(x, z) \wedge \exists x (P(y, z) \wedge Q(x, y))]$
2. $\forall x \exists z [P(x, y) \rightarrow R(x, z) \rightarrow \exists y (P(y, z) \vee R(x, y))]$

Ejercicio 6.2. Determinar, en cada caso, si la sustitución indicada es libre para la siguiente fórmula del lenguaje de la Aritmética $LA = \{0, 1, +, \cdot, <\}$:

$$\forall w (x = (y + z) \cdot w) \wedge (\exists x (x = z + 0) \vee \exists y (w + x = y \cdot z))$$

1. $[w/x + z]$
2. $[y/z + (w + 1)]$
3. $[x/y + 1]$

Ejercicio 6.3. Indicar cuál de las siguientes fórmulas expresa “*Cervantes escribió una novela más larga que cualquiera escrita por Baroja*”; donde c, b denotan a Cervantes y Baroja, respectivamente; y $E(x, y)$, $N(x)$, $L(x, y)$ expresan “ x escribió y ”, “ x es una novela”, “ x es más larga que y ”, respectivamente. Expresa en lenguaje natural el sentido de las restantes fórmulas.

1. $\forall x \exists y (L(x, y) \rightarrow E(c, y) \wedge E(b, y))$
2. $\forall x \forall y (E(c, x) \wedge E(b, y) \rightarrow L(x, y))$
3. $\exists x (N(x) \wedge E(c, x) \wedge \forall y (N(y) \wedge E(b, y) \rightarrow L(x, y)))$
4. $\exists x \forall y (E(c, x) \rightarrow E(b, y) \wedge L(x, y))$

Ejercicio 6.4. Se considera el lenguaje de primer orden $L = \{HJ, HR, SB, T, PD, MD, a, b\}$. Escribir fórmulas del lenguaje L que expresen los siguientes hechos:

1. Todo el que tiene un padre tiene una madre.
2. Todo hermano de un tío de Pedro es tío de Pedro o es su padre.
3. Todo el mundo tiene abuela.
4. Todo hijo de un hermano de Pedro es su sobrino.
5. Si dos personas tienen una abuela en común entonces son primos o bien son hermanos.
6. No todo el mundo tiene hijos.

(Supóngase que $HJ(x, y)$ expresa “ x es hijo/a de y ”; $HR(x, y)$: “ x es hermano/a de y ”; $SB(x, y)$: “ x es sobrino/a de y ”; $T(x, y)$: “ x es tío/a de y ”; $PD(x, y)$: “ x es padre de y ”; $MD(x, y)$: “ x es madre de y ”; y que las constantes a y b denotan, respectivamente, a Ana y a Pedro).

Ejercicio 6.5. Sea F la fórmula $P(x) \rightarrow P(a)$, donde a es un símbolo de constante. ¿Es F satisfacible? ¿Tiene modelos? ¿Es F una fórmula válida?

Ejercicio 6.6. Sea L un lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado, P (de aridad 1), Q (de aridad 2) y un símbolo de función, f , de aridad 1. Sea $\mathcal{I} = (U, I)$ la estructura dada por:

$$\text{Universo: } U = \{a, b, c, d\};$$

$$I(P) = \{a, b\}, \quad I(Q) = \{(a, b), (b, b), (c, b)\}, \quad I(f) = \{(a, b), (b, b), (c, a), (d, c)\}.$$

Decidir cuáles de las siguientes fórmulas de L son válidas en \mathcal{I} :

- (a) $P(x) \rightarrow \exists y Q(y, x)$
- (b) $\forall x Q(f(x), x)$
- (c) $Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)$
- (d) $Q(x, y) \rightarrow P(x)$

Ejercicio 6.7. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes?

1. $\{Q(x), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x\neg R(x)\}$
2. $\{\forall xP(x,y), \forall x\neg P(x,x)\}$
3. $\{\forall x\forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x)), \forall x\neg P(x,x), \exists yP(x,y)\}$

Ejercicio 6.8. Decidir si son correctas o no las siguientes deducciones:

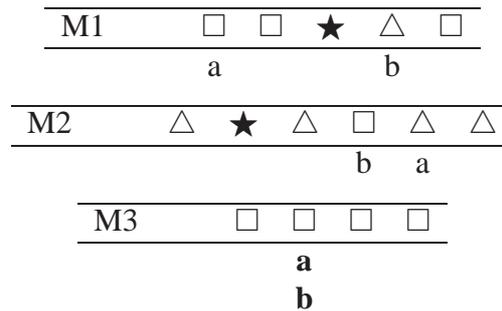
1. $\{\forall x(P(x) \vee Q(x))\} \models \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$
2. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\} \models \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$
3. $\{\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)\} \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
4. $\{P(x) \vee Q(f(x))\} \models P(x) \vee Q(x)$

Ejercicio 6.9. En el lenguaje con igualdad $L = \{a, f\}$, siendo f un símbolo de función de aridad 1 y a una constante, se consideran las siguientes fórmulas:

$$F_1 \equiv \forall x(f(x) \neq a), \quad F_2 \equiv \forall x\forall y(f(x) = f(y) \rightarrow x = y), \quad F_3 \equiv \forall x(x \neq a \rightarrow \exists y(f(y) = x)).$$

Probar que ninguna de estas fórmulas es consecuencia lógica de las dos restantes.

Ejercicio 6.10. Sea $L = \{C, T, E, IZQ, DER, a, b\}$. Un mundo es una estructura para el lenguaje L cuyo universo puede ser descrito por una lista (posiblemente infinita) de figuras (cuadrados, triángulos y estrellas) y la interpretación de los símbolos de predicado es la natural si suponemos que $C(x)$ expresa “ x es un cuadrado”, $T(x)$ expresa “ x es un triángulo”, $E(x)$ expresa “ x es una estrella”, $IZQ(x,y)$ expresa “ x está a la izquierda de y ” y $DER(x,y)$ expresa “ x está a la derecha de y ”.



1. Estudiar la validez de las siguientes fórmulas en cada uno de los mundos anteriores.

$$E(x) \rightarrow \exists y (C(y) \wedge IZQ(x,y)),$$

$$\exists x [\neg T(x) \wedge IZQ(x,a) \wedge DER(b,x)],$$

$$\exists x [C(x) \wedge (\exists y (T(y) \wedge DER(y,x)) \leftrightarrow \forall y (T(y) \rightarrow DER(y,x)))]$$

2. Para cada una de las siguientes fórmulas, describir un mundo en el que sea válida:

$$F_1 : \quad C(a) \vee [\neg E(b) \wedge (T(b) \rightarrow \exists x C(x))]$$

$$F_2 : \quad \forall x [C(x) \rightarrow \exists y (T(y) \wedge IZQ(y,x))]$$

$$F_3 : \quad \forall x [T(x) \leftrightarrow (\exists y (E(y) \wedge IZQ(y,x)))]$$

$$F_4 : \quad \exists x [E(x) \wedge \forall y (C(y) \rightarrow \neg DER(y,x))]$$

3. Describir, si es posible, un mundo en el que sean válidas todas las fórmulas del apartado anterior. ¿Es consistente el conjunto $U = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?