Lógica informática (2005–06)

Tema 8: Formas normales. Cláusulas

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Equivalencias

- Equivalencia lógica
  - Prop.: $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
  - Reflexiva: $F \equiv F$
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
  - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
  - Prop.: Si en la fórmula F_1 se sustituye una de sus subfórmulas G_1 por una fórmula G_2 lógicamente equivalente a G_1, entonces la fórmula obtenida, F_2, es lógicamente equivalente a F_1.
  - Ejemplo:
$$\begin{aligned} F_1 &= (\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x) \\ G_1 &= (\forall x)P(x) \\ G_2 &= (\forall y)P(y) \\ F_2 &= (\forall y)P(y) \to (\exists x)Q(x) \end{aligned}$$

Fórmula en forma rectificada

- Def.: F está en forma rectificada si ninguna variable aparece libre y ligada y cada cuantificador se refiere a una variable diferente.
- Ejemplos:
  - $(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(z,y)$ está en forma rectificada
  - $(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(x,y)$ no está en forma rectificada
  - $(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(z,x)$ no está en forma rectificada
- Prop.: Para toda fórmula F existe una fórmula equivalente G en forma rectificada.
- Lema del renombramiento: Si y no aparece libre en F, entonces
$$(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y]$$
$$(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y].$$
- Ejemplos de rectificación:
$$\begin{aligned} (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(z,x) &\equiv (\forall x)P(x) \to (\forall u)Q(z,u) \\ (\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(x,y) &\equiv (\forall z)P(z) \to (\forall y)Q(x,y) \end{aligned}$$

Fórmula en forma normal prenexa

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa (FNP) si es de la forma $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores. $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)$ se llama el prefijo de F y G se llama la matriz de F.
- Ejemplos:

Fórmula	¿FNP?
$\neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)]$	no
$(\forall x)(\exists y)[P(x) \land \neg P(y)]$	sí
$(\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y)$	no
$(\forall x)(\exists y)[P(x) \lor Q(y)]$	sí
$(\exists y)(\forall x)[P(x) \lor Q(y)]$	sí
$\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)])$	no
$(\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land P(z)]$	sí

Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa rectificada:

1. Rectificar la fórmula usando las equivalencias
   $(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y]$ (1)
   $(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y]$ (2)
   donde y es una variable que no ocurre libre en F.
2. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
   $F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \land (G \to F)$ (3)
3. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
   $F \to G \equiv \neg F \lor G$ (4)

Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

4. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
   $\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$ (5)
   $\neg(F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G$ (6)
   $\neg\neg F \equiv F$ (7)
   $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$ (8)
   $\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F$ (9)
5. Exteriorizar los cuantificadores usando las equivalencias

$(\forall x)F \land G \equiv (\forall x)(F \land G)$	con x no libre en G.	(11)
$(\forall x)F \lor G \equiv (\forall x)(F \lor G)$	con x no libre en G.	(12)
$(\exists x)F \land G \equiv (\exists x)(F \land G)$	con x no libre en G.	(13)
$(\exists x)F \lor G \equiv (\exists x)(F \lor G)$	con x no libre en G.	(14)
$G \land (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \land F)$	con x no libre en G.	(15)
$G \lor (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \lor F)$	con x no libre en G.	(16)
$G \land (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \land F)$	con x no libre en G.	(17)
$G \lor (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \lor F)$	con x no libre en G.	(18)

Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo 1: $\neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)]$
  - $\equiv \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall y)P(y)]$ [por (1)]
  - $\equiv \neg(\exists x)[\neg P(x) \lor (\forall y)P(y)]$ [por (4)]
  - $\equiv (\forall x)[\neg(\neg P(x) \lor (\forall y)P(y))]$ [por (9)]
  - $\equiv (\forall x)[\neg\neg P(x) \land \neg(\forall y)P(y)]$ [por (6)]
  - $\equiv (\forall x)[P(x) \land (\exists y)\neg P(y)]$ [por (7 y 8)]
  - $\equiv (\forall x)(\exists y)[P(x) \land \neg P(y)]$ [por (17)]
- Ejemplo 2: $(\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y)$
  - $\equiv (\forall x)[P(x) \lor (\exists y)Q(y)]$ [por (12)]
  - $\equiv (\forall x)(\exists y)[P(x) \lor Q(y)]$ [por (18)]
- Ejemplo 3: $(\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y)$
  - $\equiv (\exists y)[(\forall x)P(x) \lor Q(y)]$ [por (18)]
  - $\equiv (\exists y)(\forall x)[P(x) \lor Q(y)]$ [por (12)]

Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)])$

$\equiv$	$\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall y)[Q(y) \to R(y)] \to (\forall z)[P(z) \to R(z)])$	[por (1)]
$\equiv$	$\neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \lor (\forall z)[\neg P(z) \lor R(z)])$	[por (4)]
$\equiv$	$\neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \neg(\forall z)[\neg P(z) \lor R(z)]$	[por (6)]
$\equiv$	$((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[\neg(\neg P(z) \lor R(z))]$	[por (7, 8)]
$\equiv$	$((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[\neg\neg P(z) \land \neg R(z)]$	[por (6)]
$\equiv$	$((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[P(z) \land \neg R(z)]$	[por (7)]
$\equiv$	$(\exists z)[((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))]$	[por (17)]
$\equiv$	$(\exists z)[(\forall x)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]] \land (P(z) \land \neg R(z))]$	[por (11)]
$\equiv$	$(\exists z)(\forall x)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))]$	[por (11)]
$\equiv$	$(\exists z)(\forall x)[(\forall y)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))] \land (P(z) \land \neg R(z))]$	[por (15)]
$\equiv$	$(\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))]$	[por (11)]

Fórmula en forma normal prenexa conjuntiva

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa conjuntiva (FNPC) si es de la forma $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall,\exists\}$, $n \geq 0$, G no tiene cuantificadores y G está en forma normal conjuntiva.
- Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa conjuntiva:
  - Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa conjuntiva rectificada:
    1. Calcular una forma normal prenexa rectificada usando las equivalencias (1)–(18)
    2. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias
       $$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \qquad (19)$$
       $$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \qquad (20)$$
  - Ejemplo de cálculo de una FNPC de $(\forall x)(\exists y)[P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))]$:

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[(P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(x) \vee \neg R(y))] \quad \text{[por (19)]} \end{array}$$

Fórmula en forma de Skolem

- Forma de Skolem:
  - Def.: La fórmula F está en forma de Skolem (FS) si es de la forma $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)G$, donde $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.
  - Ejemplos:

$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$	no está en forma de Skolem
$(\forall x)P(x,f(x))$	sí está en forma de Skolem
$(\exists x)Q(x)$	no está en forma de Skolem
$Q(a)$	sí está en forma de Skolem

- Equisatisfacibilidad:
  - Def.: Las fórmulas F y G son equisatisfacible si:
    F es satisfacible syss G es satisfacible.
    Se representa por $F \equiv_{sat} G$
  - Ejemplos:

$$\begin{array}{lll} (\exists x)Q(x) & \equiv_{sat} & Q(a) \\ (\exists x)Q(x) & \not\equiv & Q(a) \\ (\forall x)(\exists y)P(x,y) & \equiv_{sat} & (\forall x)P(x,f(x)) \\ (\forall x)(\exists y)P(x,y) & \not\equiv & (\forall x)P(x,f(x)) \end{array}$$

Algoritmo de cálculo de forma de Skolem

- Propiedades:
  - Si a es una constante que no ocurre en F, entonces $(\exists x)F \equiv_{sat} F[x/a]$.
  - Si g es un símbolo de función n–aria que no ocurre en F, entonces $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists x)F \equiv_{sat} (\forall x_1)\dots(\forall x_n)F[x/g(x_1,\dots,x_n)]$.
- Algoritmo de cálculo de forma de Skolem:
  - Sea F una fórmula en forma normal prenexa rectificada, la forma de Skolem de F es
    $\text{Sko}(F) =$
    $$\begin{cases} \text{Sko}(G[x/a]), & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \text{ y} \\ & a \text{ es una nueva constante;} \\ \text{Sko}((\forall x_1)\dots(\forall x_n)G[x/f(x_1,\dots,x_n)]), & \text{si } F \text{ es } (\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists x)G \text{ y} \\ & f \text{ es un nuevo símbolo de función;} \\ F, & \text{si } F \text{ está en forma de Skolem} \end{cases}$$
  - Propiedad: Si F es una fórmula en forma normal prenexa rectificada, entonces $\text{Sko}(F)$ está en forma de Skolem y $\text{Sko}(F) \equiv_{sat} F$.

Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo 1:
  $$\begin{array}{l} \text{Sko}((\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)) \\ = \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,u,v,w)) \\ = \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,f(y,z),v,w)) \\ = \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))) \\ = (\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v)) \end{array}$$
- Ejemplo 2:
  $$\begin{array}{l} \text{Sko}((\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a,w) \vee Q(f(x),y)]) \\ = \text{Sko}((\forall x)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a,w) \vee Q(f(x),h(x))]) \\ = \text{Sko}((\forall x)(\forall z)[\neg P(a,g(x,z)) \vee Q(f(x),h(x))]) \\ = (\forall x)(\forall z)[\neg P(a,g(x,z)) \vee Q(f(x),h(x))] \end{array}$$

Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \land \neg P(y)] \quad \text{[por página 7]} \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \land \neg P(f(x))] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \lor Q(y)] \quad \text{[por página 7]} \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \lor Q(f(x))] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) \\ \equiv & (\exists y)(\forall x)[P(x) \lor Q(y)] \quad \text{[por página 7]} \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \lor Q(a)] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)]) \\ \equiv & (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))] \quad \text{[por p. 8]} \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(a) \land \neg R(a))] \end{array}$$

Sintaxis de la lógica clausal

- Un átomo es una fórnula atómica.
  Variables sobre átomos: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$.
- Un literal es un átomo (A) o la negación de un átomo ($\neg A$).
  Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$.
- Una cláusula es un conjunto finito de literales.
  Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$.
- La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.
  La cláusula vacía se representa por $\square$.
- Conjuntos finitos de cláusulas.
  Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$.

Semántica de la lógica clausal

- Fórmulas correspondientes:
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\{L_1, \dots, L_n\}$ es
    $(\forall x_1)\dots(\forall x_p)[L_1 \lor \dots \lor L_n]$,
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $L_1 \lor \dots \lor L_n$.
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\square$ es $\bot$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\{\{L^1_1, \dots, L^1_{n_1}\}, \dots, \{L^m_1, \dots, L^m_{n_m}\}\}$ es
    $(\forall x_1)\dots(\forall x_p)[(L^1_1 \lor \dots \lor L^1_{n_1}) \land \dots \land (L^m_1 \lor \dots \lor L^m_{n_m})]$,
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de
    $(L^1_1 \lor \dots \lor L^1_{n_1}) \land \dots \land (L^m_1 \lor \dots \lor L^m_{n_m})$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\emptyset$ es $\top$.
- Semántica:
  - Def.: En cualquier interpretación $\mathscr{I} = (U, I)$, $I(\top) = 1$ e $I(\bot) = 0$.
  - Def.: Los conceptos semánticos relativos a las cláusulas y a los conjuntos de cláusulas son los de sus correspondientes fórmulas.

Forma clausal de una fórmula

- Def.: Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas S tal que $F \equiv_{sat} S$.
- Algoritmo: Aplicando a la fórmula F los siguientes pasos se obtiene S que es una forma clausal de F:
  1. Sea $F_1 = (\exists y_1)\dots(\exists y_n)F$, donde $y_1, \dots, y_n$ son las variables libres de F.
  2. Sea F_2 una forma normal prenexa conjuntiva rectificada de F_1 calculada mediante el algoritmo de la página 9.
  3. Sea $F_3 = \text{Sko}(F_2)$, que tiene la forma
     $(\forall x_1)\dots(\forall x_p)[(L^1_1 \lor \dots \lor L^1_{n_1}) \land \dots \land (L^m_1 \lor \dots \lor L^m_{n_m})]$,
  4. Sea $S = \{\{L^1_1, \dots, L^1_{n_1}\}, \dots, \{L^m_1, \dots, L^m_{n_m}\}\}$.
- Prop.: $F \equiv_{sat} F_1 \equiv F_2 \equiv_{sat} F_3 \equiv S$.

Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{array}{lll} & \neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)] & \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \wedge \neg P(f(x))] & \text{[pág. 13]} \\ \equiv & \{\{P(x)\},\{\neg P(f(x))\}\} & \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{array}{lll} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) & \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(f(x))] & \text{[pág. 13]} \\ \equiv & \{\{P(x),Q(f(x))\}\} & \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma clausal de

$$\begin{array}{lll} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) & \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(a)] & \text{[pág. 13]} \\ \equiv & \{\{P(x),Q(a)\}\} & \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{array}{lll} & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]) & \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))] & \text{[pág. 13]} \\ \equiv & \{\{\neg P(x),Q(x)\},\{\neg Q(y),R(y)\},\{P(a)\},\{\neg R(a)\}\} & \end{array}$$

Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

$$\begin{array}{lll} & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)) & \\ \equiv & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\exists y)P(y) \rightarrow (\exists z)Q(z)) & [(2)] \\ \equiv & \neg(\neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \vee (\exists z)Q(z)) & [(4)] \\ \equiv & \neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \vee (\exists z)Q(z)) & [(4)] \\ \equiv & \neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \wedge \neg(\exists z)Q(z) & [(6)] \\ \equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \wedge \neg(\exists z)Q(z) & [(7)] \\ \equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \wedge (\forall z)\neg Q(z) & [(9)] \\ \equiv & (\exists y)[(\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge P(y)] \wedge (\forall z)\neg Q(z) & [(17)] \\ \equiv & (\exists y)[((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge P(y)) \wedge (\forall z)\neg Q(z)] & [(13)] \\ \equiv & (\exists y)[(\forall x)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y))] \wedge (\forall z)\neg Q(z)] & [(11)] \\ \equiv & (\exists y)(\forall x)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y)) \wedge (\forall z)\neg Q(z)] & [(11)] \\ \equiv & (\exists y)(\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(z)] & [(15)] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee Q(x) \wedge P(a)) \wedge \neg Q(z)] & [(15)] \\ \equiv & \{\{\neg P(x),Q(x)\},\{P(a)\},\{\neg Q(z)\}\} & \end{array}$$

Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- Equisatisfacibilidad de conjuntos de fórmulas:
  - Def.: Los conjuntos de fórmulas S_1 y S_2 son equisatisfacible si: S_1 es satisfacible syss S_2 es satisfacible.
    Se representa por $S_1 \equiv_{sat} S_2$
- Forma clausal de un conjunto de fórmulas:
  - Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equisatisfacible con S.
  - Prop.: Si $S_1,\dots,S_n$ son formas clausales de $F_1,\dots,F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1,\dots,F_n\}$.
  - Ejemplo: Una forma clausal de
    $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x), \neg(\exists x)Q(x)\}$
    es
    $\{\{\neg P(x),Q(x)\},\{P(a)\},\{\neg Q(z)\}\}$.

Consecuencia e inconsistencia de cláusulas

- Prop: Sean $S_1,\dots,S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1,\dots,F_n$ y S una forma clausal de $\neg G$. Son equivalentes:
  1. $\{F_1,\dots,F_n\} \models G$.
  2. $\{F_1,\dots,F_n,\neg G\}$ es inconsistente.
  3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
- Ejemplos:
  - Ejemplo 1:
    $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \models (\exists x)Q(x)$
    syss $\{\{\neg P(x),Q(x)\},\{P(a)\},\{\neg Q(z)\}\}$ es inconsistente.
  - Ejemplo 2:
    $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$
    syss $\{\{\neg P(x),Q(x)\},\{\neg Q(y),R(y)\},\{P(a)\},\{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.

Bibliografía

1. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 26–31.
2. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 35–39 y 46–51.
3. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 101–106.
4. S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004) pp. 62–67.
5. R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden.* (U. Politénica de Cataluña, 2003) pp. 16–17
6. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 37–49
7. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 153–160.
8. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 43–47.
9. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 51–61.