Lógica informática (2005–06)

Tema 8: Formas normales. Cláusulas

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Equivalencias

- Equivalencia lógica
  - Prop.: $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
  - Reflexiva: $F \equiv F$
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
  - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
  - Prop.: Si en la fórmula F_1 se sustituye una de sus subfórmulas G_1 por una fórmula G_2 lógicamente equivalente a G_1, entonces la fórmula obtenida, F_2, es lógicamente equivalente a F_1.
  - Ejemplo: $$\begin{aligned} F_1 &= (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) \\ G_1 &= (\forall x)P(x) \\ G_2 &= (\forall y)P(y) \\ F_2 &= (\forall y)P(y) \rightarrow (\exists x)Q(x) \end{aligned}$$

Fórmula en forma rectificada

- Def.: F está en forma rectificada si ninguna variable aparece libre y ligada y cada cuantificador se refiere a una variable diferente.
- Ejemplos:
  $(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(z,y)$ está en forma rectificada
  $(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(x,y)$ no está en forma rectificada
  $(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(z,x)$ no está en forma rectificada
- Prop.: Para toda fórmula F existe una fórmula equivalente G en forma rectificada.
- Lema del renombramiento: Si y no aparece libre en F, entonces

$$(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y]$$

$$(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y].$$

- Ejemplos de rectificación:

$$(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(z,x) \quad \equiv (\forall x)P(x) \to (\forall u)Q(z,u)$$
$$(\forall x)P(x) \to (\forall y)Q(x,y) \quad \equiv (\forall z)P(z) \to (\forall y)Q(x,y)$$

Fórmula en forma normal prenexa

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa (FNP) si es de la forma $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.
  $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)$ se llama el prefijo de F y G se llama la matriz de F.
- Ejemplos:

Fórmula	¿FNP?
$\neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)]$	no
$(\forall x)(\exists y)[P(x) \land \neg P(y)]$	sí
$(\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y)$	no
$(\forall x)(\exists y)[P(x) \lor Q(y)]$	sí
$(\exists y)(\forall x)[P(x) \lor Q(y)]$	sí
$\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)])$	no
$(\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land P(z)]$	sí

Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa rectificada:

1. Rectificar la fórmula usando las equivalencias

   $$(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y] \tag{1}$$

   $$(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y] \tag{2}$$

   donde y es una variable que no ocurre libre en F.

2. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

   $$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \land (G \rightarrow F) \tag{3}$$

3. Eliminar los condicionales usando la equivalencia

   $$F \rightarrow G \equiv \neg F \lor G \tag{4}$$

Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

4. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \tag{5}$$

$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G \tag{6}$$

$$\neg\neg F \equiv F \tag{7}$$

$$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F \tag{8}$$

$$\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F \tag{9}$$

5. Exteriorizar los cuantificadores usando las equivalencias

$$(\forall x)F \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{11}$$

$$(\forall x)F \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{12}$$

$$(\exists x)F \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{13}$$

$$(\exists x)F \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{14}$$

$$G \wedge (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \wedge F) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{15}$$

$$G \vee (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \vee F) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{16}$$

$$G \wedge (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \wedge F) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{17}$$

$$G \vee (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \vee F) \qquad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{18}$$

Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo 1: $\neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)]$

$\equiv \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall y)P(y)]$ [por (1)]

$\equiv \neg(\exists x)[\neg P(x) \vee (\forall y)P(y)]$ [por (4)]

$\equiv (\forall x)[\neg(\neg P(x) \vee (\forall y)P(y))]$ [por (9)]

$\equiv (\forall x)[\neg\neg P(x) \wedge \neg(\forall y)P(y)]$ [por (6)]

$\equiv (\forall x)[P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)]$ [por (7 y 8)]

$\equiv (\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)]$ [por (17)]

- Ejemplo 2: $(\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)$

$\equiv (\forall x)[P(x) \vee (\exists y)Q(y)]$ [por (12)]

$\equiv (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)]$ [por (18)]

- Ejemplo 3: $(\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)$

$\equiv (\exists y)[(\forall x)P(x) \vee Q(y)]$ [por (18)]

$\equiv (\exists y)(\forall x)[P(x) \vee Q(y)]$ [por (12)]

Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)])$$

$$\begin{array}{lll}
\equiv & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \wedge (\forall y)[Q(y) \to R(y)] \to (\forall z)[P(z) \to R(z)]) & \text{[por (1)]} \\
\equiv & \neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \vee (\forall z)[\neg P(z) \vee R(z)]) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & \neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge \neg(\forall z)[\neg P(z) \vee R(z)] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (\exists z)[\neg(\neg P(z) \vee R(z))] & \text{[por (7, 8)]} \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (\exists z)[\neg\neg P(z) \wedge \neg R(z)] & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (\exists z)[P(z) \wedge \neg R(z)] & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (\exists z)[((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] & \text{[por (17)]} \\
\equiv & (\exists z)[(\forall x)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]] \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] & \text{[por (11)]} \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] & \text{[por (11)]} \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)[(\forall y)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))] \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] & \text{[por (15)]} \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] & \text{[por (11)]}
\end{array}$$

Fórmula en forma normal prenexa conjuntiva

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa conjuntiva (FNPC) si es de la forma $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$, G no tiene cuantificadores y G está en forma normal conjuntiva.
- Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa conjuntiva:
  - Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa conjuntiva rectificada:
    1. Calcular una forma normal prenexa rectificada usando las equivalencias (1)–(18)
    2. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{19}$$
$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \tag{20}$$

  - Ejemplo de cálculo de una FNPC de $(\forall x)(\exists y)[P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))]$:

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))] \\ \equiv\ & (\forall x)(\exists y)[(P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(x) \vee \neg R(y))] \quad \text{[por (19)]} \end{aligned}$$

Fórmula en forma de Skolem

- Forma de Skolem:
  - Def.: La fórmula F está en forma de Skolem (FS) si es de la forma $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)G$, donde $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.
  - Ejemplos:

$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$	no está en forma de Skolem
$(\forall x)P(x,f(x))$	sí está en forma de Skolem
$(\exists x)Q(x)$	no está en forma de Skolem
$Q(a)$	sí está en forma de Skolem

- Equisatisfacibilidad:
  - Def.: Las fórmulas F y G son equisatisfacible si:
    F es satisfacible syss G es satisfacible.
    Se representa por $F \equiv_{sat} G$
  - Ejemplos:

$(\exists x)Q(x)$	$\equiv_{sat}$	$Q(a)$
$(\exists x)Q(x)$	$\not\equiv$	$Q(a)$
$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$	$\equiv_{sat}$	$(\forall x)P(x,f(x))$
$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$	$\not\equiv$	$(\forall x)P(x,f(x))$

Algoritmo de cálculo de forma de Skolem

- Propiedades:
  - Si a es una constante que no ocurre en F, entonces $(\exists x)F \equiv_{sat} F[x/a]$.
  - Si g es un símbolo de función n–aria que no ocurre en F, entonces $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists x)F \equiv_{sat} (\forall x_1)\dots(\forall x_n)F[x/g(x_1,\dots,x_n)]$.
- Algoritmo de cálculo de forma de Skolem:
  - Sea F una fórmula en forma normal prenexa rectificada, la forma de Skolem de F es

    $\text{Sko}(F) =$

    $$\begin{cases} \text{Sko}(G[x/a]), & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \text{ y} \\ & a \text{ es una nueva constante;} \\ \text{Sko}((\forall x_1)\dots(\forall x_n)G[x/f(x_1,\dots,x_n)]), & \text{si } F \text{ es } (\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists x)G \text{ y} \\ & f \text{ es un nuevo símbolo de función;} \\ F, & \text{si } F \text{ está en forma de Skolem} \end{cases}$$
  - Propiedad: Si F es una fórmula en forma normal prenexa rectificada, entonces $\text{Sko}(F)$ está en forma de Skolem y $\text{Sko}(F) \equiv_{sat} F$.

Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo 1:

$$\text{Sko}((\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w))$$

$$= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,u,v,w))$$

$$= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,f(y,z),v,w))$$

$$= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v)))$$

$$= (\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))$$

- Ejemplo 2:

$$\text{Sko}((\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a,w) \lor Q(f(x),y)])$$

$$= \text{Sko}((\forall x)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a,w) \lor Q(f(x),h(x))])$$

$$= \text{Sko}((\forall x)(\forall z)[\neg P(a,g(x,z)) \lor Q(f(x),h(x))])$$

$$= (\forall x)(\forall z)[\neg P(a,g(x,z)) \lor Q(f(x),h(x))]$$

Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)] \quad \text{[por página 7]} \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \wedge \neg P(f(x))] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)] \quad \text{[por página 7]} \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(f(x))] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv & (\exists y)(\forall x)[P(x) \vee Q(y)] \quad \text{[por página 7]} \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(a)] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)]) \\ \equiv & (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] \quad \text{[por p. 8]} \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))] \end{array}$$

Sintaxis de la lógica clausal

- Un átomo es una fórnula atómica.
  Variables sobre átomos: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$.
- Un literal es un átomo (A) o la negación de un átomo ($\neg A$).
  Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$.
- Una cláusula es un conjunto finito de literales.
  Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$.
- La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.
  La cláusula vacía se representa por $\square$.
- Conjuntos finitos de cláusulas.
  Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$.

Semántica de la lógica clausal

- Fórmulas correspondientes:
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\{L_1, \dots, L_n\}$ es
    $(\forall x_1) \dots (\forall x_p)[L_1 \lor \dots \lor L_n]$,
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $L_1 \lor \dots \lor L_n$.
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\square$ es $\bot$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$ es
    $(\forall x_1) \dots (\forall x_p)[(L_1^1 \lor \dots \lor L_{n_1}^1) \land \dots \land (L_1^m \lor \dots \lor L_{n_m}^m)]$,
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de
    $(L_1^1 \lor \dots \lor L_{n_1}^1) \land \dots \land (L_1^m \lor \dots \lor L_{n_m}^m)$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\emptyset$ es $\top$.
- Semántica:
  - Def.: En cualquier interpretación $\mathscr{I} = (U, I)$, $I(\top) = 1$ e $I(\bot) = 0$.
  - Def.: Los conceptos semánticos relativos a las cláusulas y a los conjuntos de cláusulas son los de sus correspondientes fórmulas.

Forma clausal de una fórmula

- Def.: Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas S tal que $F \equiv_{sat} S$.
- Algoritmo: Aplicando a la fórmula F los siguientes pasos se obtiene S que es una forma clausal de F:
  1. Sea $F_1 = (\exists y_1) \dots (\exists y_n) F$, donde $y_1, \dots, y_n$ son las variables libres de F.
  2. Sea F_2 una forma normal prenexa conjuntiva rectificada de F_1 calculada mediante el algoritmo de la página 9.
  3. Sea $F_3 = \text{Sko}(F_2)$, que tiene la forma
  $$(\forall x_1) \dots (\forall x_p)[(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)],$$
  4. Sea $S = \{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$.
- Prop.: $F \equiv_{sat} F_1 \equiv F_2 \equiv_{sat} F_3 \equiv S$.

Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)]$$

$$\equiv_{sat} \quad (\forall x)[P(x) \land \neg P(f(x))]$$ [pág. 13]

$$\equiv \quad \{\{P(x)\},\{\neg P(f(x))\}\}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$(\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y)$$

$$\equiv_{sat} \quad (\forall x)[P(x) \lor Q(f(x))]$$ [pág. 13]

$$\equiv \quad \{\{P(x),Q(f(x))\}\}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma clausal de

$$(\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y)$$

$$\equiv_{sat} \quad (\forall x)[P(x) \lor Q(a)]$$ [pág. 13]

$$\equiv \quad \{\{P(x),Q(a)\}\}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)])$$

$$\equiv_{sat} \quad (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(a) \land \neg R(a))]$$ [pág. 13]

$$\equiv \quad \{\{\neg P(x),Q(x)\},\{\neg Q(y),R(y)\},\{P(a)\},\{\neg R(a)\}\}$$

Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)) & \\
\equiv & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\exists y)P(y) \to (\exists z)Q(z)) & [(2)] \\
\equiv & \neg(\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \lor (\exists z)Q(z)) & [(4)] \\
\equiv & \neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \lor (\exists z)Q(z)) & [(4)] \\
\equiv & \neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \land \neg(\exists z)Q(z) & [(6)] \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \land \neg(\exists z)Q(z) & [(7)] \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \land (\forall z)\neg Q(z) & [(9)] \\
\equiv & (\exists y)[(\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land P(y)] \land (\forall z)\neg Q(z) & [(17)] \\
\equiv & (\exists y)[((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land P(y)) \land (\forall z)\neg Q(z)] & [(13)] \\
\equiv & (\exists y)[(\forall x)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y))] \land (\forall z)\neg Q(z) & [(11)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y)) \land (\forall z)\neg Q(z)] & [(11)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y) \land \neg Q(z)] & [(15)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \lor Q(x) \land P(a)) \land \neg Q(z)] & [(15)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\} &
\end{array}
$$

Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- Equisatisfacibilidad de conjuntos de fórmulas:
  - Def.: Los conjuntos de fórmulas S_1 y S_2 son equisatisfacible si:
    S_1 es satisfacible syss S_2 es satisfacible.
    Se representa por $S_1 \equiv_{sat} S_2$
- Forma clausal de un conjunto de fórmulas:
  - Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equisatisfacible con S.
  - Prop.: Si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
  - Ejemplo: Una forma clausal de
    $$\{(\forall x)[P(x) \to Q(x)], (\exists x)P(x), \neg(\exists x)Q(x)\}$$
    es
    $$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}.$$

Consecuencia e inconsistencia de cláusulas

- Prop: Sean $S_1,\dots,S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1,\dots,F_n$ y S una forma clausal de $\neg G$. Son equivalentes:
  1. $\{F_1,\dots,F_n\} \models G$.
  2. $\{F_1,\dots,F_n,\neg G\}$ es inconsistente.
  3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
- Ejemplos:
  - Ejemplo 1:

    $\{(\forall x)[P(x) \to Q(x)],(\exists x)P(x)\} \models (\exists x)Q(x)$

    syss $\{\{\neg P(x),Q(x)\},\{P(a)\},\{\neg Q(z)\}\}$ es inconsistente.
  - Ejemplo 2:

    $\{(\forall x)[P(x) \to Q(x)],(\forall x)[Q(x) \to R(x)]\} \models (\forall x)[P(x) \to R(x)]$

    syss $\{\{\neg P(x),Q(x)\},\{\neg Q(y),R(y)\},\{P(a)\},\{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.

Bibliografía

1. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 26–31.
2. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 35–39 y 46–51.
3. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 101–106.
4. S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004) pp. 62–67.
5. R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden.* (U. Politénica de Cataluña, 2003) pp. 16–17
6. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 37–49
7. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 153–160.
8. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 43–47.
9. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 51–61.