
Ejercicio 1 [2 puntos] *¿Existe un conjunto S de dos fórmulas tal que de los cuatro subconjuntos de S uno es inconsistente y tres son consistentes?*

Solución:

Sí. Por ejemplo, si $S = \{p, \neg p\}$ entonces los subconjuntos de S son

- $S_1 = \{p, \neg p\}$ que es inconsistente
- $S_2 = \{p\}$ que es consistente (un modelo es I con $I(p) = 1$).
- $S_3 = \{\neg p\}$ que es consistente (un modelo es I con $I(p) = 0$).
- $S_2 = \emptyset$ que es consistente (un modelo es I con $I(p) = 1$).

Ejercicio 2 [3 puntos] *Decidir si se verifican las siguientes relaciones de consecuencia. Para las que se verifiquen, dar una demostración por deducción natural y para las que no se verifiquen dar un contramodelo.*

1. $(p \to r) \land (q \to r) \models (p \lor q) \to r$,
2. $p \to q \models \neg q \to \neg p$.

Solución:

Solución del apartado 1: Una demostración es

1:	$(p \to r) \land (q \to r)$	premisa
2:	$p \lor q$	supuesto
3:	p	supuesto
4:	$p \to r$	$\land e$ 1
5:	r	$\to e$ 4,3
6:	q	supuesto
7:	$q \to r$	$\land e$ 1
8:	r	$\to e$ 7,6
9:	r	$\lor e$ 2,3–5,6–8
10:	$(p \lor q) \to r$	$\to i$ 2–9

Solución del apartado 2: Una demostración es

1:	$p \to q$	premisa
2:	$\neg q$	supuesto
3:	$\neg\neg p$	supuesto
4:	p	$\neg\neg$e 3
5:	q	$\to$e 1,4
6:	$\bot$	$\neg$e 5,2
7:	$\neg p$	RAA 3–6
8:	$\neg q \to \neg p$	$\to$i 2–7

Ejercicio 3 [2 puntos] *Formalizar las siguientes sentencias:*

1. *Hay exactamente un planeta.*
2. *La Luna gira alrededor de dos planetas diferentes.*

Usando P(x) para representar que x es un planeta, a para representar la Luna y Q(x,y) para representar que x gira alrededor de y.

Solución:

1. Hay exactamente un planeta.
   $\exists x\, [P(x) \land \forall y\, [P(y) \to x = y]]$
2. La Luna gira alrededor de dos planetas diferentes.
   $\exists x\, \exists y\, [P(x) \land P(y) \land G(a,x) \land G(a,y) \land x \neq y]$

Ejercicio 4 [3 puntos] *Decidir si se verifican las siguientes relaciones de consecuencia. Para las que se verifiquen, dar una demostración por deducción natural y para las que no se verifiquen dar un contramodelo.*

1. $\exists x \forall y P(x,y) \models \forall y \exists x P(x,y)$.
2. $\forall y \exists x P(x,y) \models \exists x \forall y P(x,y)$.

Solución:

Solución del apartado 1: Una demostración de $\exists x \forall y P(x,y) \models \forall y \exists x P(x,y)$ es

```
1: ∃x.∀y.P(x,y)                  premisa
2: | actual i                    supuesto
3: | | actual i1, ∀y.P(i1,y)     supuestos
4: | | P(i1,i)                   ∀e 3.2.2
5: | | ∃x.P(x,i)                 ∃i 4.3.1
6: | ∃x.P(x,i)                   ∃e 1.3-5
7: ∀y.∃x.P(x,y)                  ∀i 2-6
```

Solución del apartado 2: Un contramodelo es $\mathscr{I}$ con universo $U = \{1,2\}$ e interpretación $I(P) = \{(1,1),(2,2)$. En efecto, $\mathscr{I} \models \forall y \exists x P(x,y)$, pero $\mathscr{I} \not\models \exists x \forall y P(x,y)$.