Ejercicio 1 *Sea F la fórmula $(p \to q \wedge r) \to (\neg p \wedge r)$*

1. *Decidir por el método de los tableros semánticos si F es una tautología.*
2. *En el caso de que no lo sea, calcular a partir del apartado anterior los contramodelos de F, una forma normal disyuntiva de $\neg F$ y una forma normal conjuntiva de F.*

Solución:

Apartado 1: Para decidir si F es una tautología construimos el tablero semántico de $\neg F$.

1. $\neg((p \to q \wedge r) \to (\neg p \wedge r))$
2. $p \to q \wedge r$ (1)
3. $\neg(\neg p \wedge r)$ (1)

4. $\neg p$ (2)

6. $\neg\neg p$ (3)
Cerrada (6,4)

7. $\neg r$ (3)
Abierta
$\{\neg p, \neg r\}$

5. $q \wedge r$ (2)
8. q (5)
9. r (5)

10. $\neg\neg p$ (3)
12. p (10)
Abierta
$\{p, q, r\}$

11. $\neg r$ (3)
Cerrada (11,9)

Como tiene ramas abiertas, F no es una tautología.

Apartado 2: Los contramodelos de F, correspondientes a las ramas abiertas del tablero de $\neg F$ son

	p	q	r
I_1	0	–	0
I_2	1	1	1

Una forma a normal disyuntiva de $\neg F$ es

$$(\neg p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

y una forma a normal conjuntiva de F es

$$(p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

Ejercicio 2 *Calcular una forma de Skolem y una forma clausal de la fórmula*

$$\neg(\forall x \exists y P(x,y) \to \forall x P(x, f(x)))$$

Solución:

El cálculo de la forma de Skolem es

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x \exists y P(x,y) \to \forall x P(x, f(x))) \\
\equiv & \neg(\forall x \exists y P(x,y) \to \forall z P(z, f(z))) \\
\equiv & \forall x \exists y P(x,y) \land \neg \forall z P(z, f(z)) \\
\equiv & \forall x \exists y P(x,y) \land \exists z \neg P(z, f(z)) \\
\equiv & \exists z (\forall x \exists y P(x,y) \land \neg P(z, f(z))) \\
\equiv & \exists z \forall x (\exists y P(x,y) \land \neg P(z, f(z))) \\
\equiv & \exists z \forall x \exists y (P(x,y) \land \neg P(z, f(z))) \\
\equiv_{sat} & \forall x \exists y (P(x,y) \land \neg P(a, f(a))) \\
\equiv_{sat} & \forall x (P(x, g(x)) \land \neg P(a, f(a)))
\end{array}
$$

La forma clausal es $\{\{P(x,g(x))\}, \{\neg P(a, f(a))\}\}$

Ejercicio 3 *Sea S el conjunto formado por las siguientes cláusulas:*

$$
\begin{array}{l}
\{P(x,z), P(y,x), Q(f(z))\} \\
\{\neg P(x,a), \neg P(a,x), Q(x)\} \\
\{\neg Q(x)\} \\
\{\neg Q(b)\}
\end{array}
$$

Se pide:

1. *Calcular el universo de Herbrand de S.*
2. *Decidir por resolución si S es consistente y, en el caso de que lo sea, calcular a partir de la resolución un modelo de Herbrand de S.*

Solución:

Apartado 1: El universo de Herbrand de S es $\{a, b, f(a), f(b), f(f((a)), f(f(b)), \dots\}$.

Apartado 2: Una demostración de la inconsistencia de S por resolución es la siguiente

1	$\{P(x,z), P(y,x), Q(f(z))\}$	
2	$\{\neg P(x,a), \neg P(a,x), Q(x)\}$	
3	$\{\neg Q(x)\}$	
4	$\{\neg Q(b)\}$	
5	$\{P(x,z), P(y,x)\}$	resolvente de 1 y 3
6	$\{\neg P(x,a), \neg P(a,x)\}$	resolvente de 2 y 3
7	$\{P(x,x))\}$	factor de 5 con $\sigma = [y/x, z/x]$
8	$\{\neg P(a,a)\}$	factor de 6 con $\sigma = [x/a]$
9	$\square$	resolvente de 7 y 8 con $\sigma = [x/a]$

Ejercicio 4 *Se consideran las siguientes afirmaciones:*

F_1 : *Los charlatanes hablan con todo el mundo.*

F_2 : *Los solitarios no hablan con nadie.*

F_3 : *Los solitarios no son charlatanes.*

Se pide:

1. *Formalizarlas usando la siguiente simbología: $C(x)$ significa que x es charlatán. $S(x)$ significa que x es solitario. $H(x,y)$ significa que x habla con y.*
2. *Decidir por resolución si $F_1, F_2 \models F_3$.*

Solución:

Apartado 1: La formalización es

$$\begin{array}{l} F_1 := \forall x(C(x) \to \forall y H(x,y)) \\ F_2 := \forall x(S(x) \to \forall y \neg H(x,y)) \\ F_3 := \forall x(S(x) \to \neg C(x)) \end{array}$$

Apartado 2: Para hacer la resolución, calculamos la forma clausal de la primera premisa:

$$\begin{array}{ll} & \forall x(C(x) \to \forall y H(x,y)) \\ \equiv & \forall x(\neg C(x) \lor \forall y H(x,y)) \\ \equiv & \forall x \forall y(\neg C(x) \lor H(x,y)) \\ \equiv & \{\{\neg C(x), H(x,y)\}^1\} \end{array}$$

la forma clausal de la segunda premisa

$$\begin{array}{ll} & \forall x(S(x) \to \forall y \neg H(x,y)) \\ \equiv & \forall x(\neg S(x) \lor \forall y \neg H(x,y)) \\ \equiv & \forall x \forall y(\neg S(x) \lor \neg H(x,y)) \\ \equiv & \{\{\neg S(x), \neg H(x,y)\}^2\} \end{array}$$

y la forma clausal de la negación de la conclusión

$$\begin{array}{ll} & \neg \forall x(S(x) \to \neg C(x)) \\ \equiv & \exists x \neg(S(x) \to \neg C(x)) \\ \equiv & \exists x(S(x) \land \neg\neg C(x)) \\ \equiv & \exists x(S(x) \land C(x)) \\ \equiv_{sat} & S(a) \land C(a) \\ \equiv & \{\{S(a)\}^3, \{C(a)\}^4\} \end{array}$$

Una demostración por resolución es

$$\begin{array}{lll} 1 & \{\neg C(x), H(x,y)\} & \\ 2 & \{\neg S(x), \neg H(x,y)\} & \\ 3 & \{S(a)\} & \\ 4 & \{C(a)\} & \\ 5 & \{\neg H(a,y)\} & \text{resolvente de 2 y 3 con } [x/a] \\ 6 & \{H(a,y)\} & \text{resolvente de 1 y 4 con } [x/a] \\ 7 & \square & \text{resolvente de 5 y 6} \end{array}$$

Por lo tanto, F_3 es consecuencia lógica de F_1 y F_2.