Soluciones del examen de *Lógica informática* (Grupo 1) del 10 de Junio de 2008

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 10 de Junio de 2008

Ejercicio 1 *[2 puntos] Sea F la fórmula $((p \to q) \to p) \to p$. Decidir si F es una tautología usando los siguientes métodos:*

1. *Tableros semánticos.*
2. *Resolución.*
3. *Forma normal conjuntiva.*

Solución:

Apartado 1: La fórmula es una tautología syss su negación tiene un tablero completo cerrado. Vamos a construir un tablero completo cerrado de la negación de la fórmula:

1. $\neg(((p \to q) \to p) \to p)$
2. $(p \to q) \to p$ (1)
3. $\neg p$ (1)

4. $\neg(p \to q)$ (2)	5. p (2)
6. p (4)	Cerrado (5,3)
7. $\neg q$	
Cerrado (6,3)	

Por tanto, la fórmula $((p \to q) \to p) \to p$ es una tautología.

Apartado 2: Para decidir por resolución si la fórmula es una tautología comenzamos calculando una forma clausal de su negación:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(((p \to q) \to p) \to p) \\
\equiv & ((p \to q) \to p) \land \neg p \\
\equiv & (\neg(p \to q) \lor p) \land \neg p \\
\equiv & ((p \land \neg q) \lor p) \land \neg p \\
\equiv & (p \lor p) \land (\neg q \lor p) \land \neg p \\
\equiv & \{\{p\}, \{\neg q, p\}, \{\neg p\}\}
\end{array}
$$

Una demostración por resolución es

1	$\{p\}$	
2	$\{\neg q, p\}$	
3	$\{\neg p\}$	
4	$\square$	resolvente de 1 y 3

Apartado 3: El cálculo de una forma normal conjuntiva de la fórmula es

$$
\begin{array}{rl}
& ((p \to q) \to p) \to p \\
\equiv & \neg((p \to q) \to p) \vee p \\
\equiv & ((p \to q) \wedge \neg p) \vee p \\
\equiv & ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p \\
\equiv & (\neg p \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee p) \\
\equiv & \top \wedge \top \\
\equiv & \top
\end{array}
$$

Por tanto la fórmula es una tautlogía.

Ejercicio 2 *[2 puntos] Formalizar las siguientes oraciones:*

1. *Ana tiene por lo menos dos hermanos.*
2. *Ana tiene a lo sumo dos hermanos.*
3. *Ana tiene una única madre.*
4. *Algunos no tienen hermanos.*

Usando la siguiente simbolización: $H(x,y)$ que significa que x es hermano de y, $M(x,y)$ que significa que x es madre de y y a que representa a Ana.

Solución:

1. Ana tiene por lo menos dos hermanos.
   $\exists x \exists y (H(x,a) \wedge H(y,a) \wedge x \neq y)$
2. Ana tiene a lo sumo dos hermanos.
   $\forall x \forall y (H(x,a) \wedge H(y,a) \to x = y)$
3. Ana tiene una única madre.
   $\exists x (M(x,a) \wedge \forall y (M(y,a) \to x = y))$
4. Algunos no tienen hermanos.
   $\exists x \neg \exists y H(y,x)$

Ejercicio 3 *[2 puntos] Sea F la fórmula $\exists x \forall y (\exists z P(z,y) \wedge \neg P(x,y))$.*

1. *Calcular un modelo I de F cuyo universo sea $U = \{a,b,c\}$.*
2. *¿Cuántos modelos tiene F?*
3. *Decidir si $F \models \forall x P(x,x)$.*
4. *¿Hay modelos de F cuyo dominio tiene un solo elemento?*

Solución:

Apartado 1: Para entender el sentido de la fórmula, vamos a reescribirla manteniendo la equivalencia lógica de la manera siguiente: puesto que el cuantificador universal distribuye respecto la conjunción, F es lógicamente equivalente a

$$\exists x(\forall y \exists z P(z,y) \land \forall y \neg P(x,y))$$

y puesto que x no aparece en la primera subfórmula de la conjunción, también es equivalente a

$$\forall y \exists z P(z,y) \land \exists x \forall y \neg P(x,y))$$

Es inmediato ver que un posible modelo consiste en interpretar P de la manera siguiente: $I(P) = \{(b,a),(b,b)\}$.

Apartado 2: No. El modelo dado en el apartado anterior satisface F pero no satisface $\forall x P(x,x)$.

Apartado 3: No. Si un modelo tuviera un solo elemento a, entonces tendríamos que $P^I(a,a) = 1$, debido a la primera subfórmula de la conjunción, y también $P^I(a,a) = 0$ debido a la segunda subfórmula.

Ejercicio 4 *[2 puntos] Sea F la fórmula $\forall x(P(x) \land Q(x) \to (\forall y(Q(y) \to R(x,y))))$ y G la fórmula $\forall x(P(x) \land Q(x) \to R(x,x))$. Decidir si G es consecuencia lógica de F usando los siguientes métodos:*

1. *Deducción natural.*
2. *Resolución.*

Solución:

Apartado 1: Una demostración por deducción natural es

1	$\forall x(P(x) \land Q(x) \to (\forall y(Q(y) \to R(x,y))))$	premisa
2	actual a	supuesto
3	$P(a) \land Q(a)$	supuesto
4	$P(a) \land Q(a) \to (\forall y(Q(y) \to R(a,y)))$	$\forall$e $1,2$
5	$\forall y(Q(y) \to R(a,y))$	$\to$e $4,3$
6	$Q(a) \to R(a,a)$	$\forall$e $5,2$
7	$Q(a)$	$\land$e 3
8	$R(a,a)$	$\to$e $6,7$
9	$P(a) \land Q(a) \to R(a,a)$	$\to$i $3-8$
10	$\forall x(P(x) \land Q(x) \to R(x,x))$	$\forall$i $2-9$

Apartado 2: Para por resolución $F \models G$, empezamos calculando una forma clausal de F

$$
\begin{array}{ll}
 & \forall x(P(x)\wedge Q(x)\to\forall y(Q(y)\to R(x,y))) \\
\equiv & \forall x(\neg(P(x)\wedge Q(x))\vee\forall y(Q(y)\to R(x,y))) \\
\equiv & \forall x(\neg P(x)\vee\neg Q(x)\vee\forall y(\neg Q(y)\vee R(x,y))) \\
\equiv & \forall x\forall y(\neg P(x)\vee\neg Q(x)\vee\neg Q(y)\vee R(x,y)) \\
\equiv & \{\{\neg P(x),\neg Q(x),\neg Q(y),R(x,y)\}\}
\end{array}
$$

A continación calculamos una forma clausal de $\neg G$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\forall x(P(x)\wedge Q(x)\to R(x,x)) \\
\equiv & \exists x\neg(P(x)\wedge Q(x)\to R(x,x)) \\
\equiv & \exists x(P(x)\wedge Q(x)\wedge\neg R(x,x)) \\
\equiv_{sat} & P(a)\wedge Q(a)\wedge\neg R(a,a) \\
\equiv & \{\{P(a)\},\{Q(a)\},\{\neg R(a,a)\}\}
\end{array}
$$

Finalmente, una demostración por resolución con las cláusulas obtenidas es la siguiente:

1	$\{\neg P(x),\neg Q(x),\neg Q(y),R(x,y)\}$	
2	$\{P(a)\}$	
3	$\{Q(a)\}$	
4	$\{\neg R(a,a)\}$	
5	$\{\neg P(a),\neg Q(a)\}$	resolvente de 1 y 4 con $\sigma=[x/a,y/a]$
6	$\{\neg Q(a)\}$	resolvente de 5 y 2
7	$\square$	resolvente de 6 y 3

Ejercicio 5 *[2 puntos] Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:*

1. *Si t_1, t_2 y t_3 son tres términos y se tiene que t_1 y t_2 son unificables y que t_2 y t_3 son unificables, entonces t_1 y t_3 son unificables.*

2. *Si $\{G,H\}$ es un nodo de un tablero semántico cuya raiz es $\{F\}$, entonces $G\wedge H$ es consecuencia lógica de F.*

3. *Si $\{G,H\}$ es un nodo de un tablero semántico cuya raiz es $\{F\}$, entonces F es consecuencia lógica de $G\wedge H$.*

4. *Si G es una subfórmula de F, G' es una forma normal disyuntiva de G y F' es una forma normal disyuntiva de F, entonces G' es una subfórmula de F'.*

Para las que se verifiquen dar una justificación y para las que no dar un contraejemplo.

Solución:

Apartado 1: Es falso. Un contraejemplo consiste tomar t_1 como a, t_2 como x y t_3 como b.

Apartado 2: Es falso. Por ejemplo, sean F la fórmula $(p\wedge p)\vee r$, G la fórmula p y H la fórmula q. Entonces, $\{G,H\}$ es un nodo de un tablero semántico cuya raiz es $\{F\}$, pero $G\wedge H$ no es consecuencia lógica de F.

Apartado 3: Es cierto, ya que si $\{G,H\}$ es un nodo de un tablero semántico cuya raiz es $\{F\}$, entonces en el proceso de la construcción del tablero hay un paso en el que se introduce la hoja $\{G,H\}$. Sean $\{F_{1,1},\dots,F_{1,p}\},\dots,\{F_{m,1},\dots,F_{m,q}\}$ las restantes hojas del tablero en ese momento. Entonces,

$$F \equiv (G \wedge H) \vee (F_{1,1} \wedge \cdots \wedge F_{1,p}) \vee \cdots \vee (F_{m,1} \wedge \cdots \wedge F_{m,q})$$

Por tanto, $G \wedge H \models F$.

Apartado 4: Es falso. Por ejemplo, sean

- F la fórmula $p \wedge (q \vee r)$,
- G la fórmula $q \vee r$,
- F' la fórmula $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ y
- G' la fórmula $q \vee r$,

Entonces,

- G es una subfórmula de F,
- G' es una forma normal disyuntiva de G,
- F' es una forma normal disyuntiva de F, pero
- G' no es una subfórmula de F'