Lógica informática (2007–08)

Tema 3: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 3: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

1. Representación del conocimiento en lógica de primer orden

2. Sintaxis de la lógica de primer orden

3. Semántica de la lógica de primer orden

Tema 3: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

1. Representación del conocimiento en lógica de primer orden
   - Representación de conocimiento geográfico
   - Representación del mundo de los bloques
   - Representación de conocimiento astronómico

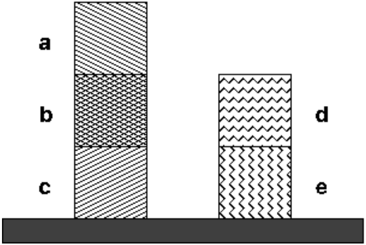
2. Sintaxis de la lógica de primer orden

3. Semántica de la lógica de primer orden

Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Ejemplo 1: *Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla*
  - Representación en lógica proposicional:
    $\{SvC \to CvS, \quad SvC\} \models CvS$
- Ejemplo 2: *Si una ciudad es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla*
  - Representación en lógica proposicional: Imposible
  - Representación en lógica de primer orden:
    $\{\forall x\, \forall y\, [vecina(x, y) \to vecina(y, x)], \quad vecina(Sevilla, Cadiz)\}$
    $\models vecina(Cadiz, Sevilla)$

Representación del mundo de los bloques



- Simbolización:
  - sobre(x, y) se verifica si el bloque x está colocado sobre el bloque y
  - sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa
- Situación del ejemplo:
  sobre(a, b), sobre(b, c), sobre_mesa(c), sobre(d, e), sobre_mesa(e)

Representación del mundo de los bloques

- Definiciones:
  - bajo(x, y) se verifica si el bloque x está debajo del bloque y
    $\forall x\ \forall y\ [\text{bajo}(x, y) \leftrightarrow \text{sobre}(y, x)]$
  - encima(x, y) se verifica si el bloque x está encima del bloque y pudiendo haber otros bloques entre ellos
    $\forall x\ \forall y\ [\text{encima}(x, y) \leftrightarrow \text{sobre}(x, y) \lor \exists z\ [\text{sobre}(x, z) \land \text{encima}(z, y)]]$
  - libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
    $\forall x\ [\text{libre}(x) \leftrightarrow \neg\exists y\ \ \text{sobre}(y, x)]$
  - pila(x, y, z) se verifica si el bloque x está sobre el y, el y sobre el z y el z sobre la mesa
    $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\text{pila}(x, y, z) \leftrightarrow \text{sobre}(x, y) \land \text{sobre}(y, z) \land \text{sobre\_mesa}(z)]$
- Propiedades:
  - Si z, y, z es una pila entonces y no está libre
    $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\text{pila}(x, y, z) \rightarrow \neg\, \text{libre}(y)]$

Representación del mundo de los bloques con funciones e igualdad

- Simbolización:
  - es_bloque(x) se verifica si x es un bloque.
  - superior(x) es el bloque que está sobre el bloque x.
- Situación del ejemplo:
  - es_bloque(a), es_bloque(b), es_bloque(c), es_bloque(d), es_bloque(e)
  - $\text{superior}(b) = a, \text{superior}(c) = b, \text{superior}(e) = d$
- Definiciones:
  - sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa
    $\forall x\ [\text{sobre\_mesa}(x) \leftrightarrow \text{es\_bloque}(x) \wedge \neg\exists y\ \ \text{superior}(y) = x]$
  - libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
    $\forall x\ [\text{libre}(x) \leftrightarrow \neg\exists y\ \ \text{superior}(x) = y]$
  - tope(x) es el bloque libre que está encima de x
    $$\begin{aligned}\forall x\ [\ &(\text{libre}(x) \rightarrow \text{tope}(x) = x) \wedge \\ &(\neg\,\text{libre}(x) \rightarrow \text{tope}(x) = \text{tope}(\text{superior}(x)))]\end{aligned}$$

Representación de conocimiento astronómico

- *La Tierra es un planeta:*
  $\text{planeta}(\text{Tierra})$
- *La Luna no es un planeta:*
  $\neg\,\text{planeta}(\text{Luna})$
- *La Luna es un satélite:*
  $\text{satélite}(\text{Luna})$
- *La Tierra gira alrededor del Sol:*
  $\text{gira}(\text{Tierra}, \text{Sol})$
- *Todo planeta es un satélite:*
  $\forall x\ [\text{planeta}(x) \to \text{satélite}(x)]$
- *Todo planeta gira alrededor del Sol:*
  $\forall x\ [\text{planeta}(x) \to \text{gira}(x, \text{Sol})]$
- *Algún planeta gira alrededor de la Luna:*
  $\exists x\ [\text{planeta}(x) \wedge \text{gira}(x, \text{Luna})]$

Representación de conocimiento astronómico

- *Hay por lo menos un satélite:*
  $\exists x \ \text{satélite}(x)$
- *Ningún planeta es un satélite:*
  $\neg\exists x \ [\text{planeta}(x) \land \text{satélite}(x)]$
- *Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:*
  $\neg\exists x \ \ \text{gira}(x, x)$
- *Alrededor de los satélites no giran objetos:*
  $\forall x \ [\text{satélite}(x) \to \neg\exists y \ \ \text{gira}(y, x)]$
- *Hay exactamente un satélite:*
  $\exists x \ [\text{satélite}(x) \land \forall y \ [\text{satélite}(y) \to x = y]]$
- *La Luna es un satélite de la Tierra:*
  $\text{satélite}(\text{Luna}, \text{Tierra})$
- *Todo planeta tiene un satélite:*
  $\forall x \ [\text{planeta}(x) \to \exists y \ \text{satélite}(y, x)]$

Representación de conocimiento astronómico

- *La Tierra no tiene satélites:*
  $\neg\exists x \; \text{satélite}(x, \text{Tierra})$
- *Algún planeta no tiene satélites:*
  $\exists x \; [\text{planeta}(x) \land \neg\exists y \; \text{satélite}(y, x)]$
- *Sólo los planetas tienen satélites:*
  $\forall x \; [\exists y \; \text{satélite}(y, x) \rightarrow \text{planeta}(x)]$
- *Todo satélite es satélite de algún planeta:*
  $\forall x \; [\text{satélite}(x) \rightarrow \exists y \; (\text{planeta}(y) \land \text{satélite}(x, y))]$
- *La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes:*
  $$\neg\exists x \; \exists y \; [\; \text{planeta}(x) \land \text{planeta}(y) \land \text{gira}(\text{Luna}, x) \land \text{gira}(\text{Luna}, y) \land x \neq y]$$
- *Hay exactamente dos planetas:*
  $$\exists x \; \exists y \; [\; \text{planeta}(x) \land \text{planeta}(y) \land x \neq y \land \forall z \; [\text{planeta}(z) \rightarrow z = x \lor z = y]]$$

Tema 3: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

1. Representación del conocimiento en lógica de primer orden

2. Sintaxis de la lógica de primer orden
    - Lenguaje de primer orden
    - Términos y fórmulas de primer orden
    - Subfórmulas
    - Variables libres y ligadas

3. Semántica de la lógica de primer orden

Lenguaje de primer orden

- Símbolos lógicos:
  - Variables: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$.
  - Conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
  - Cuantificadores: $\forall, \exists$.
  - Símbolo de igualdad: $=$.
- Símbolos propios:
  - Símbolos de constantes: $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$.
  - Símbolos de predicado (con aridad): $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$.
  - Símbolos de función (con aridad): $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$.
- Símbolos auxiliares: "(", ")", ",".
- Notación:
  - $L, L_1, L_2, \dots$ representan lenguajes de primer orden.
  - Var representa el conjunto de las variables.
- Los símbolos de predicados de aridad mayor que 1 se llaman de relaciones.

Ejemplos de lenguajes de primer orden

- Lenguaje del mundo de los bloques:
  - Símbolos de constantes: a, b, c, d, e
  - Símbolos de predicado (y de relación):
    – de aridad 1: $\text{sobre\_mesa}, \text{libre}, \text{es\_bloque}$
    – de aridad 2: $\text{sobre}, \text{bajo}, \text{encima}$
    – de aridad 3: pila
  - Símbolos de función (de aridad 1): $\text{superior}, \text{tope}$
- Lenguaje de la aritmética:
  - Símbolos de constantes: $0, 1$
  - Símbolos de función:
    – monaria: s (siguiente)
    – binarias: $+, \cdot$
  - Símbolo de predicado binario: $<$

Términos

- Def. de término de un lenguaje de primer orden L:
  - Las variables son términos de L.
  - Las constantes de L son términos de L.
  - Si f es un símbolo de función n–aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $+(\cdot(x, 1), s(y))$ es un término, que se suele escribir como $(x \cdot 1) + s(y)$
    - $+(\cdot(x, <), s(y))$ no es un término
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - superior(superior(c)) es un término.
    - libre(superior(c)) no es un término.
- Notación:
  - $s, t, t_1, t_2, \dots$ representan términos.
  - Térm(L) representa el conjunto de los términos de L

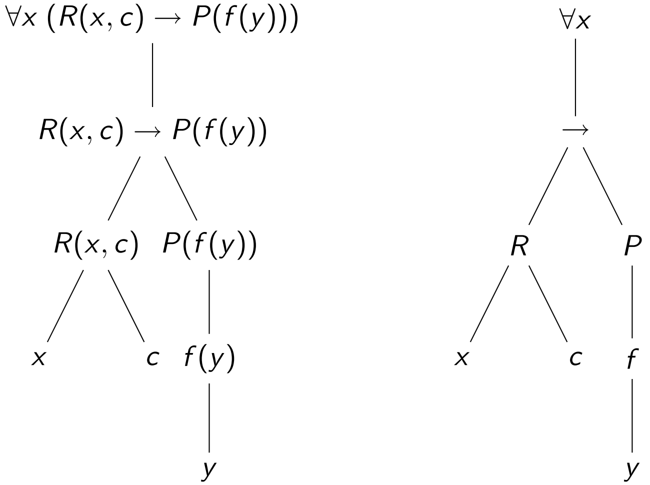
Fórmulas atómicas

- Def. de fórmula atómica de un lenguaje de primer orden L:
  - Si t_1 y t_2 son términos de L, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica de L.
  - Si P es un símbolo de relación n–aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $< (\cdot(x, 1), s(y))$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x \cdot 1 < s(y)$
    - $+(x, y) = \cdot(x, y)$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x + y = x \cdot y$
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - $\text{libre}(\text{superior}(c))$ es una fórmula atómica.
    - $\text{tope}(c) = \text{superior}(b)$ es una fórmula atómica.
- Notación:
  - $A, B, A_1, A_2, \dots$ representan fórmulas atómicas.
  - $\text{Atom}(L)$ representa el conjunto de las fórmulas atómicas de L.

Fórmulas

- Definición de las fórmulas de L:
  - Las fórmulas atómicas de L son fórmulas de L.
  - Si F y G son fórmulas de L, entonces $\neg F$, $(F \land G)$, $(F \lor G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas de L.
  - Si F es una fórmula de L, entonces $\forall x\ F$ y $\exists x\ F$ son fórmulas de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $\forall x\ \exists y\ < (x, y)$ es una fórmula que se escribe como $\forall x\ \exists y\ x < y$
    - $\forall x\ \exists y\ + (x, y)$ no es una fórmula.
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - $\forall x\ (\text{tope}(x) = x \leftrightarrow \text{libre}(x))$ es una fórmula.
- Notación:
  - $F, G, H, F_1, F_2, \dots$ representan fórmulas.
  - $\text{Fórm}(L)$ representa el conjunto de las fórmulas de L.

Árboles de análisis (o de formación)



Subfórmulas

- Def: El conjunto Subf(F) de las subfórmulas de una fórmula F se define recursivamente por:

  $$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una fórmula atómica;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F = G * H; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \forall x\ G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \exists x\ G \end{cases}$$

- Ejemplo:

  $$\begin{aligned} \text{Subf}(\forall x\ (R(x,c) \to P(f(y)))) = \{\ & \forall x\ (R(x,c) \to P(f(y))), \\ & (R(x,c) \to P(f(y))), \\ & R(x,c), \\ & P(f(y))\} \end{aligned}$$

Criterios de reducción de paréntesis

- Pueden eliminarse los paréntesis externos.
  $F \land G$ es una abreviatura de $(F \land G)$
- Precedencia de asociación de conectivas y cuantificadores:
  $\forall, \exists, \neg, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow$.
  $\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$ es una abreviatura de $(\forall x\ P(x)) \rightarrow Q(x)$
- Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.

$F \lor G \lor H$	es una abreviatura de	$(F \lor (G \lor H))$
$F \land G \land H \rightarrow \neg F \lor G$	es una abreviatura de	$((F \land (G \land H)) \rightarrow$

- Los símbolos binarios pueden escribirse en notación infija.

$x + y$	es una abreviatura de	$+(x, y)$
$x < y$	es una abreviatura de	$< (x, y)$

Conjuntos de variables

- Def.: El conjunto de las variables del término t es

$$\mathrm{V}(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } t \text{ es una constante;} \\ \{x\}, & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Def.: El conjunto de las variables de la fórmula F es

$$\mathrm{V}(F) = \begin{cases} \mathrm{V}(t_1) \cup \mathrm{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ \mathrm{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathrm{V}(G) \cup \mathrm{V}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathrm{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \forall x\ G; \\ \mathrm{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \exists x\ G \end{cases}$$

- Ejemplos:
  - El conjunto de las variables de $\forall x\ (R(x,c) \to P(f(y)))$ es $\{x, y\}$.
  - El conjunto de las variables de $\forall x\ (R(a,c) \to P(f(y)))$ es $\{y\}$.

Apariciones libres y ligadas

- Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es ligada si es en una subfórmula de F de la forma $\forall x\ G$ ó $\exists x\ G$.
- Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es libre si no es ligada.
- Ejemplo: Las apariciones ligadas son las subrayadas:

$$\forall x\ (P(\underline{x}) \rightarrow R(\underline{x}, y)) \rightarrow (\exists y\ P(\underline{y}) \rightarrow R(z, x))$$
$$\exists x\ R(\underline{x}, y) \vee \forall y\ P(\underline{y})$$
$$\forall x\ (P(\underline{x}) \rightarrow \exists y\ R(\underline{x}, \underline{y}))$$
$$P(x) \rightarrow R(x, y)$$

Variables libres y ligadas

- La variable x es libre en F si tiene una aparición libre en F.
- La variable x es ligada en F si tiene una aparición ligada en F.
- El conjunto de las variables libres de una fórmula F es:

$$\mathrm{VL}(F) = \begin{cases} \mathrm{V}(t_1) \cup \mathrm{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ \mathrm{VL}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathrm{VL}(G) \cup \mathrm{VL}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathrm{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } \forall x\ G; \\ \mathrm{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } \exists x\ G \end{cases}$$

- Ejemplo:

Fórmula	Ligadas	Libres
$\forall x\ (P(x) \to R(x,y)) \to (\exists y\ P(y) \to R(x,z))$	x, y	x, y, z
$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x,y))$	x, y	
$\forall z\ (P(x) \to R(x,y))$		x, y

Fórmulas cerradas y abiertas

- Fórmula cerradas:
  - Def.: Una fórmula cerrada (o sentencia) es una fórmula sin variables libres.
  - Ejemplos: $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ R(x,y))$ es cerrada.
    $\exists x\ R(x,y) \vee \forall y\ P(y)$ no es cerrada.
- Fórmulas abiertas:
  - Def.: Una fórmula abierta es una fórmula con variables libres.
  - Ejemplos: $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ R(x,y))$ no es abierta.
    $\exists x\ R(x,y) \vee \forall y\ P(y)$ es abierta.

Tema 3: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

1. Representación del conocimiento en lógica de primer orden

2. Sintaxis de la lógica de primer orden

3. Semántica de la lógica de primer orden
   - Estructuras, asignaciones e interpretaciones
   - Evaluación de términos y fórmulas
   - Modelo, satisfacibilidad y validez de fórmulas
   - Modelo y consistencia de conjuntos de fórmulas
   - Consecuencia lógica
   - Equivalencia lógica

Estructuras, asignaciones e interpretaciones

- Una estructura del lenguaje L es un par $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que:
  - U es un conjunto no vacío, denominado universo de la estructura;
  - I es una función con dominio el conjunto de símbolos propios de L tal que
    - si c es una constante de L, entonces $I(c) \in U$;
    - si f es un símbolo de función n–aria de L, entonces $I(f) : U^n \to U$;
    - si P es un símbolo de relación 0–aria de L, entonces $I(P) \in \{1, 0\}$;
    - si R es un símbolo de relación n–aria $(n > 0)$ de L, entonces $I(R) \subseteq U^n$;
- Una asignación A en una estructura (U, I) es una función $A : \text{Var} \to U$ que hace corresponder a cada variable del alfabeto un elemento del universo de la estructura.
- Una interpretación de L es un par $(\mathcal{I}, A)$ formado por una estructura $\mathcal{I}$ de L y una asignación A en $\mathcal{I}$.
- Notación: A veces se usa para los valores de verdad V y F en lugar de 1 y 0.

Ejemplos de estructuras

Sea L el lenguaje de la aritmética cuyos símbolos propios son:

constante: 0;
símbolo de función monaria: s;
símbolo de función binaria: $+$ y
símbolo de relación binaria: $\leq$

- Primera estructura de L:
  $U_1 = \mathbb{N}$
  $I_1(0) = 0$
  $I_1(s) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ (sucesor)
  $I_1(+) = \{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ (suma)
  $I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ (menor o igual)
- Segunda estructura de L:
  $U_2 = \{0, 1\}^*$ (cadenas de 0 y 1)
  $I_2(0) = \epsilon$ (cadena vacía)
  $I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0, 1\}^*\}$ (siguiente)

Ejemplos de estructuras

- Tercera estructura de L:
  $U_3 = \{abierto, cerrado\}$
  $I_3(0) = cerrado$
  $I_3(s) = \{(abierto, cerrado), (cerrado, abierto)\}$
  $I_3(+) =$
  $\{\ (abierto, abierto, abierto), (abierto, cerrado, abierto),$
  $(cerrado, abierto, abierto), (cerrado, cerrado, cerrado)\}$
  $I_3(\leq) =$
  $\{\ (abierto, abierto), (cerrado, abierto), (cerrado, cerrado)\}$

e	$I_3(s)(e)$
$abierto$	$cerrado$
$cerrado$	$abierto$

$I_3(+)$	$abierto$	$cerrado$
$abierto$	$abierto$	$abierto$
$cerrado$	$abierto$	$cerrado$

$I_3(\leq)$	$abierto$	$cerrado$
$abierto$	1	0
$cerrado$	1	1

Ejemplo de evaluación de términos

- Sean L el lenguaje de la página 26 y t el término $s(x+s(0))$.
  - Si $\mathcal{I}$ es la primera estructura y $A(x)=3$, entonces
    $$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_A(t) & = \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) & = s^I(3+^I s^I(0^I)) = \\ & = s^I(3+^I s^I(0)) & = s^I(3+^I 1) = \\ & = s^I(4) & = 5 \end{array}$$
  - Si $\mathcal{I}$ es la segunda estructura y $A(x)=10$, entonces
    $$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_A(t) & = \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) & = s^I(10+^I s^I(0^I)) = \\ & = s^I(10+^I s^I(\epsilon)) & = s^I(10+^I 1) = \\ & = s^I(101) & = 1011 \end{array}$$
  - Si $\mathcal{I}$ es la tercera estructura y $A(x)=abierto$, entonces
    $$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_A(t) & = \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) & = s^I(abierto+^I s^I(0^I)) = \\ & = s^I(abierto+^I s^I(cerrado)) & = s^I(abierto+^I abierto) = \\ & = s^I(abierto) & = cerrado \end{array}$$

Evaluación de términos

- Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L y una asignación A en $\mathcal{I}$, se define la función de evaluación de términos $\mathcal{I}_A : \text{Térm}(L) \to U$ por

$$\mathcal{I}_A(t) = \begin{cases} I(c), & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ A(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ I(f)(\mathcal{I}_A(t_1), \dots, \mathcal{I}_A(t_n)), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- $\mathcal{I}_A(t)$ se lee "el valor de t en $\mathcal{I}$ respecto de A".
- Ejemplo: Sean L el lenguaje de la página 26, t el término $s(+(x, s(0)))$, $\mathcal{I}$ la primera estructura y $A(x) = 3$.

$$\begin{array}{llll} \mathcal{I}_A(t) & = \mathcal{I}_A(s(+(x, s(0)))) & & = I(s)(\mathcal{I}_A(+(x, s(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) & & = I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) \\ & = I(s)(I(+)(3, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) & & = I(s)(I(+)(3, I(s)(I(0)))) = \\ & = I(s)(I(+)(3, I(s)(0))) & & = I(s)(I(+)(3, 1)) = \\ & = I(s)(4) & & = 5 \end{array}$$

Evaluación de fórmulas

- Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L y una asignación A sobre $\mathcal{I}$, se define la función de evaluación de fórmulas $\mathcal{I}_A : \text{Fórm}(L) \to \mathbb{B}$ por
  - Si F es $t_1 = t_2$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_=(\mathcal{I}_A(t_1), I_A(t_2))$
  - Si F es $P(t_1, \dots, t_n)$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_{I(P)}(\mathcal{I}_A(t_1), \dots, \mathcal{I}_A(t_n))$
  - Si F es $\neg G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_\neg(\mathcal{I}_A(G))$
  - Si F es $G * H$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_*(\mathcal{I}_A(G), \mathcal{I}_A(H))$
  - Si F es $\forall x\ G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si para todo } u \in U \text{ se tiene} \\ & \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
  - Si F es $\exists x\ G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } u \in U \text{ tal que} \\ & \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $\mathcal{I}_A(F)$ se lee "el valor de F en $\mathcal{I}$ respecto de A".

Conceptos auxilares para la evaluación de fórmulas

- La función de verdad de la igualdad en U es la función $H_= : U^2 \to \mathbb{B}$ definida por

$$H_=(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } u_1 = u_2; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Función de verdad de una relación: Si R es una relación n–aria en U (i.e. $R \subseteq U^n$), entonces la función de verdad de R es la función $H_R : U^n \to \mathbb{B}$ definida por

$$H_R(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } (u_1, \dots, u_n) \in R; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Variante de una asignación: Sea A una asignación en la estructura (U, I) y $u \in U$. Mediante $A[x/u]$ se representa la asignación definida por

$$A[x/u](y) = \begin{cases} u, & \text{si } y \text{ es } x; \\ A(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

Ejemplo de evaluación de fórmula

Evaluación de $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = V \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = V \text{ y} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = V \end{array}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = V \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = V \text{ ó} \\ \mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}P(x,y) = V \end{array}$$

$\mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = P^I(1,1) = V$
Luego, $\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = V$.

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = V \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/2,y/1]}P(x,y) = V \text{ ó} \\ \mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = V \end{array}$$

$\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = P^I(2,2) = V$
Luego, $\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = V$.

Por tanto, $\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = V$

Ejemplo de evaluación de fórmulas

Evaluación de $\forall x\ g(g(x)) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ g(g(x)) = x) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]} g(g(x)) = x = \mathrm{V} \text{ y} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]} g(g(x)) = x = \mathrm{V} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(1)) = 1) \\ &= (g^I(2) = 1) \\ &= (1 = 1) \\ &= \mathrm{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(2)) = 2) \\ &= (g^I(1) = 2) \\ &= (2 = 2) \\ &= \mathrm{V} \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_A(\forall x\ g(g(x)) = x) = \mathrm{V}$.

Dependencias en la evaluación de fórmulas

- Ejemplo de dependencia del universo: Sea G la fórmula $\forall x\, \exists y\, R(y,x)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathrm{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, I), I(R) = <$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathrm{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = <$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la estructura: Sea G la fórmula $\exists x\, \forall y\, R(x,y)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathrm{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathrm{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \geq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la asignación: Sea G la fórmula $\forall y\, R(x,y)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathrm{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$.
  - $\mathcal{I}_A(G) = \mathrm{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$.

Evaluación y variables libres

- Sea t un término de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
  - Si A y B son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables de t, entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$.
  - Si t no tiene variables, entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(t)$.
- Sea F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
  - Si A y B son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables libres de F, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$.
  - Si F es cerrada, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(F)$.

Modelo de una fórmula

- Sean F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
  - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de F si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
    Se representa por $\mathcal{I}_A \models F$.
  - $\mathcal{I}$ es un modelo de F si, para todo asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
    Se representa por $\mathcal{I} \models F$.
- Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(f) = +$ e $I(g) = *$.
  - Si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y) = 2$. Entonces
    $\mathcal{I}_A \models f(x,y) = g(x,y)$,
  - Si B es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $B(x) = 1, B(y) = 2$. Entonces
    $\mathcal{I}_B \not\models f(x,y) = g(x,y)$,
  - $\mathcal{I} \not\models f(x,y) = g(x,y)$
  - $\mathcal{I} \models f(x,y) = f(y,x)$

Satisfacibilidad y validez

- Def.: Sea F una fórmula de L.
  - F es válida si toda estructura de L es modelo de F, (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$). Se representa por $\models F$.
  - F es satisfacible si tiene alguna realización (i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en I tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
  - F es insatisfacible si no tiene ninguna realización (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en I se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 0$).
- Ejemplos:
  - $\exists x \; P(x) \lor \forall x \; \neg P(x)$ es válida.
  - $\exists x \; P(x) \land \exists x \; \neg P(x)$ es satisfacible, pero no es válida.
  - $\forall x \; P(x) \land \exists x \; \neg P(x)$ es insatisfacible.

Satisfacibilidad y validez

- F es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.
  F es válida
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F)$
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(\neg F$
  $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible.
- Si F es válida, entonces F es satisfacible.
  F es válida
  $\Longrightarrow$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F)$
  $\Longrightarrow$ existe una estructura $\mathcal{I}$ y una asignación A tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
  $\Longrightarrow$ F es satisfacible.
- F es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.
  $\forall x\ P(x)$ y $\neg\forall x\ P(x)$ son satisfacibles.
- Sea F una fórmula de L y $x_1, \dots, x_n$ las variables libres de F.
  - F es válida syss $\forall x_1 \dots \forall x_n\ F$ es válida.
    [$\forall x_1 \dots \forall x_n\ F$ es el cierre universal de F].
  - F es satisfacible syss $\exists x_1 \dots \exists x_n\ F$ es satisfacible.

Modelo de un conjunto de fórmulas

- Notación: $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- Def.: Sean S un conjunto de fórmulas de L, $\mathcal{I}$ una estructura de L y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de S si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$. Se representa por $\mathcal{I}_A \models S$.
  - $\mathcal{I}$ es un modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I} \models F$ (i.e. para toda $F \in S$ y toda asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A(F) = 1$). Se representa por $\mathcal{I} \models S$.
- Ejemplo: Sea $S = \{\forall y\ R(x, y),\ \forall y\ f(x, y) = y\}$.
  - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de S.
  - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = <, f^I = +, A(x) = 0$ no es realización de S.
- Ejemplo: Sea $S = \{R(e, y),\ f(e, y) = y\}$.
  - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = +, e^I = 0$ es modelo de S.
  - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <, f^I = +, e^I = 0$ no es modelo de S.

Consistencia de un conjunto de fórmulas

- Def.: Sea S un conjunto de fórmulas de L.
  - S es consistente si S tiene alguna realización (i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ tales que, para toda $F \in S$, $I_A(F) = 1$).
  - S es inconsistente si S no tiene ninguna realización (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, existe alguna $F \in S$, tal que $I_A(F) = 0$).
- Ejemplos:
  - $S = \{\forall y\ R(x,y),\ \forall y\ f(x,y) = y\}$ es consistente.
    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de S.
  - $S = \{P(x) \to Q(x),\ \forall y\ P(y),\ \neg Q(x)\}$ es inconsistente.
- Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas *cerradas* de L. Entonces S es consistente syss S tiene algún modelo.

Consecuencia lógica

- Def.: Sean F una fórmula de L y S un conjunto de fórmulas de L.
  - F es consecuencia lógica de S si todas las realizaciones de S lo son de F.
    (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
    si $\mathcal{I}_A \models S$ entonces $\mathcal{I}_A \models F$).
    Se representa por $S \models F$.
  - Se escribe $G \models F$ en lugar de $\{G\} \models F$.
  - Se escribe $G \not\models F$ en lugar de $\{G\} \not\models F$.
- Ejemplos:
  - $\forall x \, P(x) \models P(y)$
  - $P(y) \not\models \forall x \, P(x)$
    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \{1, 2\}, P^I = \{1\}, A(y) = 1$.
  - $\{\forall x \, (P(x) \rightarrow Q(x)), \; P(c)\} \models Q(c)$
  - $\{\forall x \, (P(x) \rightarrow Q(x)), \; Q(c)\} \not\models P(c)$
    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \{1, 2\}, c^I = 1, P^I = \{2\}, Q^I = \{1, 2\}$.
  - $\{\forall x \, (P(x) \rightarrow Q(x)), \; \neg Q(c)\} \models \neg P(c)$
  - $\{P(c), \; \neg P(d)\} \models c \neq d$

Consecuencia lógica e inconsistencia

- $S \models F$ syss $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

  $S \models F$
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$.
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, existe alguna $H \in S \cup \{\neg F\}$ tal que $\mathcal{I}_A(H) = 0$.
  $\iff$ $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.
- Sean F una fórmula *cerrada* de L y S un conjunto de fórmulas *cerradas* de L. Entonces, son equivalentes
  - F es consecuencia lógica de S
  - todos los modelos de S lo son de F.

Equivalencia lógica

- Def.: Sean F y G fórmulas de L. F y G son equivalentes si para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_A(G)$.
  Se representa por $F \equiv G$.
- Ejemplos:
  - $P(x) \not\equiv P(y)$.
    $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $A(x) = 1, A(y) = 2$.
  - $\forall x\ P(x) \equiv \forall y\ P(y)$.
  - $\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$.
  - $\exists x\ (P(x) \land Q(x)) \not\equiv \exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$.
    $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $Q^I = \{2\}$.
- Propiedades: Sean F y G fórmulas cerradas de L.
  - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
  - $F \equiv G$ syss $F \models G$ y $G \models F$.

Equivalencia lógica

- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
  - Reflexiva: $F \equiv F$
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
  - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
  - Prop.: Si en la fórmula F_1 se sustituye una de sus subfórmulas G_1 por una fórmula G_2 lógicamente equivalente a G_1, entonces la fórmula obtenida, F_2, es lógicamente equivalente a F_1.
  - Ejemplo:
    $$\begin{array}{ll} F_1 & = \forall x\ P(x) \to \exists x\ Q(x) \\ G_1 & = \forall x\ P(x) \\ G_2 & = \forall y\ P(y) \\ F_2 & = \forall y\ P(y) \to \exists x\ Q(x) \end{array}$$

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 195–259 y 323–326.
2. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 17–26.
3. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 64–87.
4. J.H. Gallier *Logic for computer science (foundations of automatic theorem Proving)* (June 2003) pp. 146–186.
5. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 90–109 y 128–140.
6. M. Ojeda e I. Pérez de Guzmán *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de primer orden)* (Ágora, 1997) pp. 1–37 y 49–51.
7. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 22–29.