

Lógica informática (2007–08)

Tema 5: Tableros semánticos

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 5: Tableros semánticos

1. Tableros semánticos proposicionales
2. Tableros semánticos de primer orden

Tema 5: Tableros semánticos

1. Tableros semánticos proposicionales

- Búsqueda de modelos
- Notación uniforme
- Procedimiento de completación de tableros
- Modelos por tableros semánticos
- Consistencia mediante tableros
- Teorema por tableros
- Deducción por tableros
- Tableros en notación reducida

2. Tableros semánticos de primer orden

3 / 24

Búsqueda exitosa de modelos

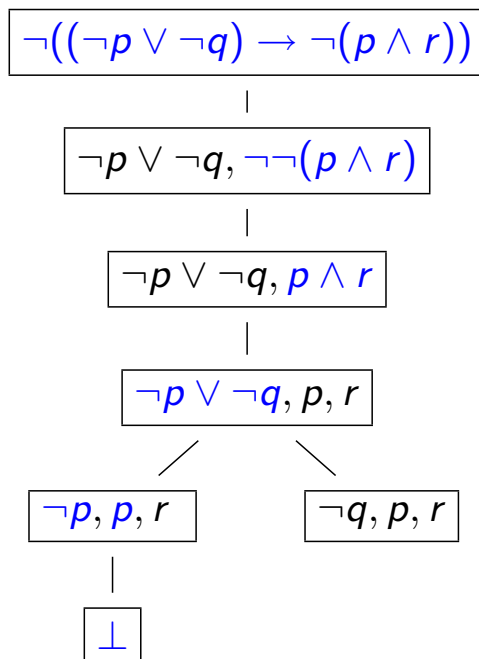
- Búsqueda de modelos de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$

$$\begin{aligned} & I \models \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)) \\ \text{syss } & I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))\} \\ \text{syss } & I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge r)\} \\ \text{syss } & I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge r\} \\ \text{syss } & I \models \{p, r, \neg p \vee \neg q\} \\ \text{syss } & I \models \{p, r, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\} \\ \text{syss } & I \models \{\perp\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\} \end{aligned}$$

- Modelos de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$:
Las interpretaciones I tales que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ e $I(r) = 1$.

4 / 24

Búsqueda exitosa de modelos por tableros semánticos



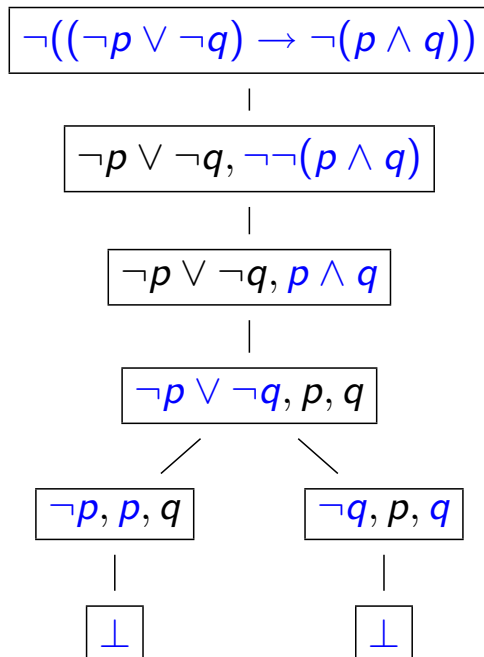
Búsqueda fallida de modelos

- Búsqueda de modelos de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$.

$I \models \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$
 syss $I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))\}$
 syss $I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge q)\}$
 syss $I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge q\}$
 syss $I \models \{p, q, \neg p \vee \neg q\}$
 syss $I \models \{p, q, \neg p\}$ ó $I \models \{p, q, \neg q\}$
 syss $I \models \{\perp\}$ ó $I \models \{\perp\}$

- La fórmula $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$ no tiene modelos (es insatisfacible).

Búsqueda fallida de modelos por tableros semánticos



Notación uniforme: Literales y dobles negaciones

- ▶ Literales
 - ▶ Un **literal** es un átomo o la negación de un átomo (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
 - ▶ $I \models p$ syss $I(p) = 1$.
 - ▶ $I \models \neg p$ syss $I(p) = 0$.
- ▶ Dobles negaciones
 - ▶ F es una **doble negación** si es de la forma $\neg\neg G$.
 - ▶ $I \models \neg\neg G$ syss $I \models G$.
- ▶ Reducción de modelos:
 - ▶ $I \models F \wedge G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
 - ▶ $I \models F \vee G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.

Notación uniforme: Fórmulas alfa y beta

- ▶ Las **fórmulas alfa**, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

- ▶ Si F es alfa con componentes F_1 y F_2 , entonces $F \equiv F_1 \wedge F_2$.
- ▶ Las **fórmulas beta**, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

- ▶ Si F es beta con componentes F_1 y F_2 , entonces $F \equiv F_1 \vee F_2$.

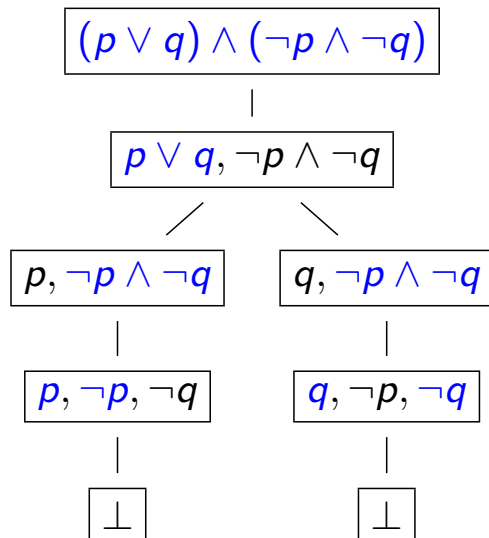
Tablero del conjunto de fórmulas S

Un **tablero** del conjunto de fórmulas S es un árbol construido mediante las reglas:

- ▶ El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta S es un tablero de S .
- ▶ Sea \mathcal{T} un tablero de S y S_1 la etiqueta de una hoja de \mathcal{T} .
 1. Si S_1 contiene **una fórmula y su negación**, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $\{\perp\}$ es un tablero de S .
 2. Si S_1 contiene una **doble negación** $\neg\neg F$, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$ es un tablero de S .
 3. Si S_1 contiene una **fórmula alfa** F de componentes F_1 y F_2 , entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$ es un tablero de S .
 4. Si S_1 contiene una **fórmula beta** F de componentes F_1 y F_2 , entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de S_1 los nodos etiquetados con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1\}$ y $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_2\}$ es un tablero de S .

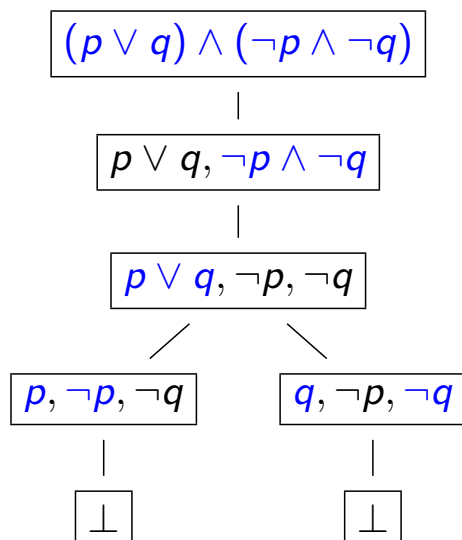
No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Un tablero completo de $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ es



No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Otro tablero completo de $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ es



Modelos por tableros

- ▶ Def.: Sea S un conjunto de fórmulas, \mathcal{T} un tablero de S .
 - ▶ Una hoja de \mathcal{T} es **cerrada** si contiene una fórmula y su negación o es de la forma $\{\perp\}$.
 - ▶ Una hoja de \mathcal{T} es **abierta** si es un conjunto de literales y no contiene un literal y su negación.
- ▶ Def.: Un **tablero completo** de S es un tablero de S tal que todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- ▶ Def.: Un tablero es **cerrado** si todas sus hojas son cerradas.
- ▶ Reducción de modelos:
 - ▶ $I \models F \wedge G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
 - ▶ $I \models F \vee G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.
- ▶ Propiedades:
 1. Si las hojas de un tablero del conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son $\{G_{1,1}, \dots, G_{1,n_1}\}, \dots, \{G_{m,1}, \dots, G_{m,n_m}\}$, entonces $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \equiv (G_{1,1} \wedge \dots \wedge G_{1,n_1}) \vee \dots \vee (G_{m,1} \wedge \dots \wedge G_{m,n_m})$.
 2. Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas, \mathcal{T} un tablero de S e I una interpretación. Entonces, $I \models S$ syss existe una hoja S_1 de \mathcal{T} tal que $I \models S_1$.

Consistencia mediante tableros

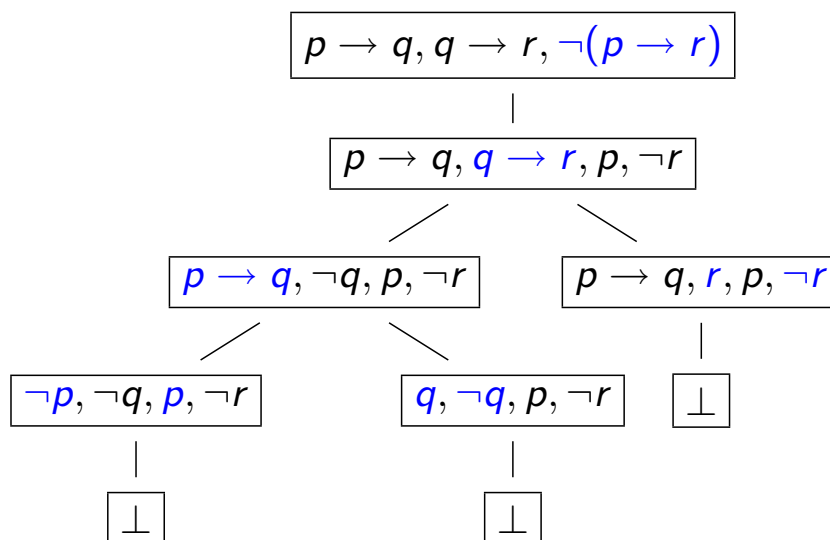
- ▶ Prop.: Si $\{p_1, \dots, p_n, \neg q_1, \dots, \neg q_m\}$ es una hoja abierta de un tablero del conjunto de fórmulas S , entonces la interpretación I tal que $I(p_1) = 1, \dots, I(p_n) = 1, I(q_1) = 0, \dots, I(q_m) = 0$ es un modelo de S .
- ▶ Prop.: Un conjunto de fórmulas S es consistente syss S tiene un tablero con alguna hoja abierta.
- ▶ Prop.: Un conjunto de fórmulas S es inconsistente syss S tiene un tablero completo cerrado.

Teorema por tableros

- ▶ Def.: Una fórmula F es un **teorema** (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si $\{\neg F\}$ tiene un tablero completo cerrado. Se representa por $\vdash_{Tab} F$.
- ▶ Ejemplos: $\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$
 $\not\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$
- ▶ Teor.: El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,
 - Adecuado:** $\vdash_{Tab} F \Rightarrow \models F$
 - Completo:** $\models F \Rightarrow \vdash_{Tab} F$

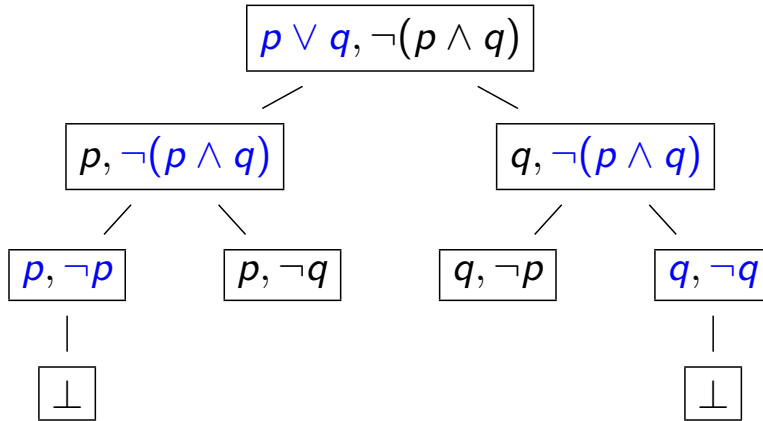
Deducción por tableros

- ▶ Def.: La fórmula F es **deducible** (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas S si existe un tablero completo cerrado de $S \cup \{\neg F\}$. Se representa por $S \vdash_{Tab} F$.
- ▶ Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$



Deducción por tableros

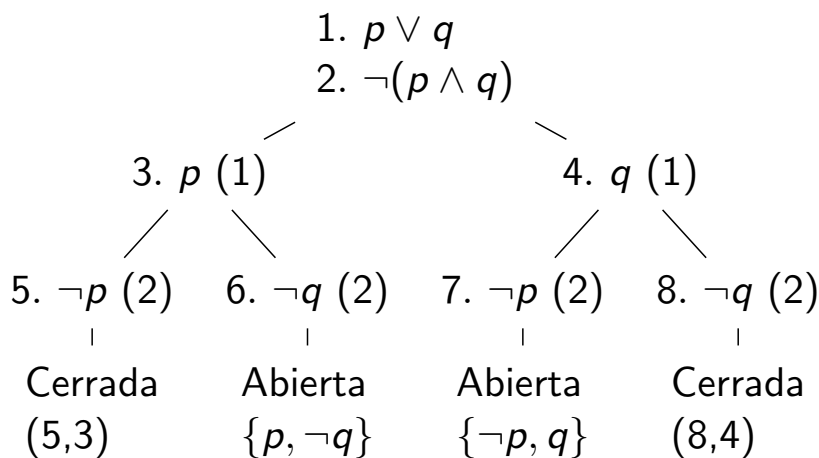
- ▶ Ejemplo: $\{p \vee q\} \not\vdash_{Tab} p \wedge q$



- ▶ Contramodelos de $\{p \vee q\} \not\vdash_{Tab} p \wedge q$
 las interpretaciones I_1 tales que $I_1(p) = 1$ e $I_1(q) = 0$
 las interpretaciones I_2 tales que $I_2(p) = 0$ e $I_2(q) = 1$
- ▶ Teor.: $S \vdash_{Tab} F$ syss $S \models F$.

Tableros en notación reducida

- ▶ Ejemplo: $\{p \vee q\} \not\vdash_{Tab} p \wedge q$



Tema 5: Tableros semánticos

1. Tableros semánticos proposicionales

2. Tableros semánticos de primer orden

Fórmulas gamma y delta

Consecuencia mediante tableros semánticos

Fórmulas gamma y delta

- ▶ Las **fórmulas gamma**, junto con sus componentes, son

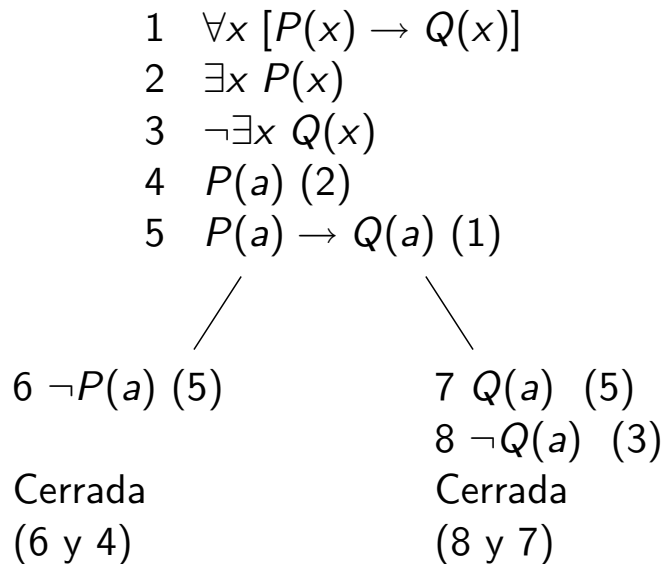
$\forall x F$	$F[x/t]$	(con t un término básico)
$\neg \exists x F$	$\neg F[x/t]$	(con t un término básico)

- ▶ Las **fórmulas delta**, junto con sus componentes, son

$\exists x F$	$F[x/a]$	(con a una nueva constante)
$\neg \forall x F$	$\neg F[x/a]$	(con a una nueva constante)

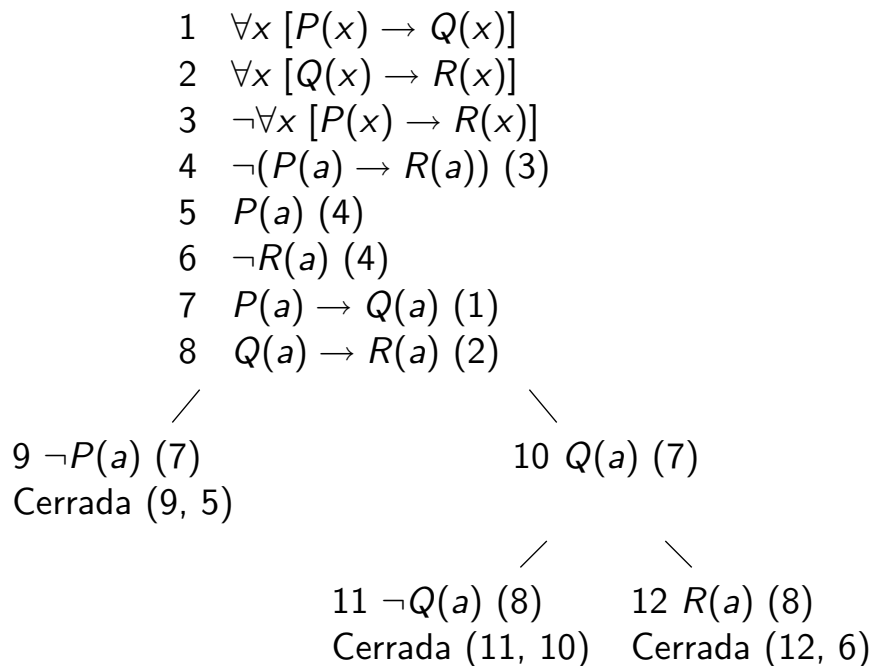
Ejemplo de consecuencia mediante tableros semánticos

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x)\} \vdash_{Tab} \exists x Q(x)$$



Ejemplo de consecuencia mediante tableros semánticos

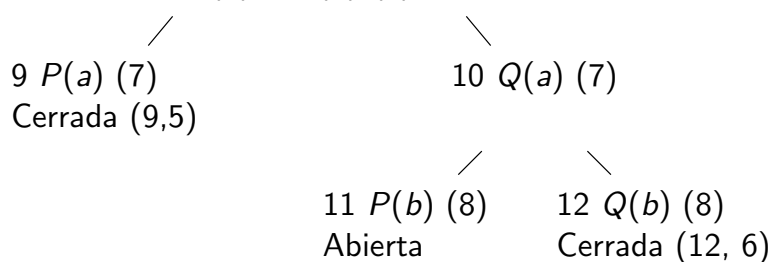
$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)]\} \vdash_{Tab} \forall x [P(x) \rightarrow R(x)]$$



Ejemplo de no consecuencia mediante tablero

$$\forall x [P(x) \vee Q(x)] \not\models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

- 1 $\forall x [P(x) \vee Q(x)]$
- 2 $\neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$
- 3 $\neg\forall x P(x)$ (2)
- 4 $\neg\forall x Q(x)$ (2)
- 5 $\neg P(a)$ (3)
- 6 $\neg Q(b)$ (4)
- 7 $P(a) \vee Q(a)$ (1)
- 8 $P(b) \vee Q(b)$ (1)



Contramodelo: $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$.

Bibliografía

1. Ben-Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)
 Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux
2. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)
 Cap. 3: Semantic tableaux and resolution
3. Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)
 Cap. 7.9: Tableaux semánticos para la lógica de proposiciones
4. Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)
 Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
 Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas