

# Lógica informática (2008–09)

## Tema 7: Resolución proposicional

José A. Alonso Jiménez  
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 7: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución

## Tema 7: Resolución proposicional

### 1. Lógica de cláusulas

Sintaxis de la lógica clausal

Semántica de la lógica clausal

Equivalencias entre cláusulas y fórmulas

Modelos, consistencia y consecuencia entre cláusulas

Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

### 2. Demostraciones por resolución

### 3. Algoritmos de resolución

### 4. Refinamientos de resolución

### 5. Argumentación por resolución

3 / 37

## Sintaxis de la lógica clausal

- ▶ Un **átomo** es una variable proposicional.  
Variables sobre átomos:  $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$
- ▶ Un **literal** es un átomo ( $p$ ) o la negación de un átomo ( $\neg p$ ).  
Variables sobre literales:  $L, L_1, L_2, \dots$
- ▶ Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.  
Variables sobre cláusulas:  $C, C_1, C_2, \dots$
- ▶ La **cláusula vacía** es el conjunto vacío de literales.  
La cláusula vacía se representa por  $\square$ .
- ▶ **Conjuntos finitos de cláusulas**.  
Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas:  $S, S_1, S_2, \dots$

4 / 37

## Semántica de la lógica clausal

- ▶ Una **interpretación** es una aplicación  $I : VP \rightarrow \mathbb{B}$ .
- ▶ El **valor de un literal positivo**  $p$  en una interpretación  $I$  es  $I(p)$ .
- ▶ El **valor de un literal negativo**  $\neg p$  en una interpretación  $I$  es

$$I(\neg p) = \begin{cases} 1, & \text{si } I(p) = 0; \\ 0, & \text{si } I(p) = 1. \end{cases}$$

- ▶ El **valor de una cláusula**  $C$  en una interpretación  $I$  es

$$I(C) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } L \in C \text{ tal que } I(L) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- ▶ El **valor de un conjunto de cláusulas**  $S$  en una interpretación  $I$  es

$$I(S) = \begin{cases} 1, & \text{si para toda } C \in S, I(C) = 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- ▶ Prop.: En cualquier interpretación  $I$ ,  $I(\square) = 0$ .

## Cláusulas y fórmulas

- ▶ Equivalencias entre cláusulas y fórmulas
  - ▶ Def.: Una cláusula  $C$  y una fórmula  $F$  son **equivalentes** si  $I(C) = I(F)$  para cualquier interpretación  $I$ .
  - ▶ Def.: Un conjunto de cláusulas  $S$  y una fórmula  $F$  son **equivalentes** si  $I(S) = I(F)$  para cualquier interpretación  $I$ .
  - ▶ Def.: Un conjunto de cláusulas  $S$  y un conjunto de fórmulas  $\{F_1, \dots, F_n\}$  son **equivalentes** si, para cualquier interpretación  $I$ ,  $I(S) = 1$  si y sólo si  $I$  es un modelo de  $\{F_1, \dots, F_n\}$ .
- ▶ De cláusulas a fórmulas
  - ▶ Prop.: La cláusula  $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$  es equivalente a la fórmula  $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$ .
  - ▶ Prop.: El conjunto de cláusulas  $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$  es equivalente a la fórmula  $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$ .

## De fórmulas a cláusulas (forma clausal)

- ▶ Def.: Una **forma clausal** de una fórmula  $F$  es un conjunto de cláusulas equivalente a  $F$ .
- ▶ Prop.: Si  $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$  es una forma normal conjuntiva de la fórmula  $F$ . Entonces, una forma clausal de  $F$  es  $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ .
- ▶ Ejemplos:
  - ▶ Una forma clausal de  $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$  es  $\{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}\}$ .
  - ▶ Una forma clausal de  $p \rightarrow q$  es  $\{\{\neg p, q\}\}$ .
  - ▶ La cláusula  $\{\{\neg p, q\}, \{r\}\}$  es una forma clausal de las fórmulas  $(p \rightarrow q) \wedge r$  y  $\neg\neg r \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$ .
- ▶ Def.: Una **forma clausal** de un conjunto de fórmulas  $S$  es un conjunto de cláusulas equivalente a  $S$ .
- ▶ Prop.: Si  $S_1, \dots, S_n$  son formas clausales de  $F_1, \dots, F_n$ , entonces  $S_1 \cup \dots \cup S_n$  es una forma clausal de  $\{F_1, \dots, F_n\}$ .

## Modelos, consistencia y consecuencia entre cláusulas

- ▶ Def.: Una interpretación  $I$  es **modelo** de un conjunto de cláusulas  $S$  si  $I(S) = 1$ .
- ▶ Ej.: La interpretación  $I$  tal que  $I(p) = I(q) = 1$  es un modelo de  $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$ .
- ▶ Def.: Un conjunto de cláusulas es **consistente** si tiene modelos e **inconsistente**, en caso contrario.
- ▶ Ejemplos:
  - ▶  $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$  es consistente.
  - ▶  $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  es inconsistente.
- ▶ Prop.: Si  $\square \in S$ , entonces  $S$  es inconsistente.
- ▶ Def.:  $S \models C$  si para todo modelo  $I$  de  $S$ ,  $I(C) = 1$ .

## Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

- ▶ Prop: Sean  $S_1, \dots, S_n$  formas clausales de las fórmulas  $F_1, \dots, F_n$ .
  - ▶  $\{F_1, \dots, F_n\}$  es consistente syss  $S_1 \cup \dots \cup S_n$  es consistente.
  - ▶ Si  $S$  es una forma clausal de  $\neg G$ , entonces son equivalentes
    1.  $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$ .
    2.  $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$  es inconsistente.
    3.  $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$  es inconsistente.
- ▶ Ejemplo:  $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$  syss  $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}\}$  es inconsistente.

## Tema 7: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
  - Regla de resolución proposicional
  - Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución

## Regla de resolución

- ▶ Reglas habituales:

$$\begin{array}{l}
 \text{Modus Ponens: } \frac{p \rightarrow q, \quad p}{q} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{p\}}{\{q\}} \\
 \text{Modus Tollens: } \frac{p \rightarrow q, \quad \neg q}{\neg p} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}} \\
 \text{Encadenamiento: } \frac{p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q, r\}}{\{\neg p, r\}}
 \end{array}$$

- ▶ Regla de resolución proposicional:

$$\frac{\{p_1, \dots, r, \dots, p_m\}, \quad \{q_1, \dots, \neg r, \dots, q_n\}}{\{p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n\}}$$

## Regla de resolución

- ▶ Def.: Sean  $C_1$  una cláusula,  $L$  un literal de  $C_1$  y  $C_2$  una cláusula que contiene el complementario de  $L$ . La **resolvente de  $C_1$  y  $C_2$  respecto de  $L$**  es

$$\text{Res}_L(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$$

- ▶ Ejemplos:
 
$$\begin{aligned}
 \text{Res}_q(\{p, q\}, \{\neg q, r\}) &= \{p, r\} \\
 \text{Res}_q(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) &= \{p, \neg p\} \\
 \text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) &= \{q, \neg q\} \\
 \text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{q, p\}) &= \{q\} \\
 \text{Res}_p(\{p\}, \{\neg p\}) &= \square
 \end{aligned}$$

- ▶ Def.:  $\text{Res}(C_1, C_2)$  es el conjunto de las resolventes entre  $C_1$  y  $C_2$

- ▶ Ejemplos:
 
$$\begin{aligned}
 \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}) &= \{\{p, \neg p\}, \{q, \neg q\}\} \\
 \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, q\}) &= \{\{q\}\} \\
 \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{q, r\}) &= \emptyset
 \end{aligned}$$

- ▶ Nota:  $\square \notin \text{Res}(\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\})$

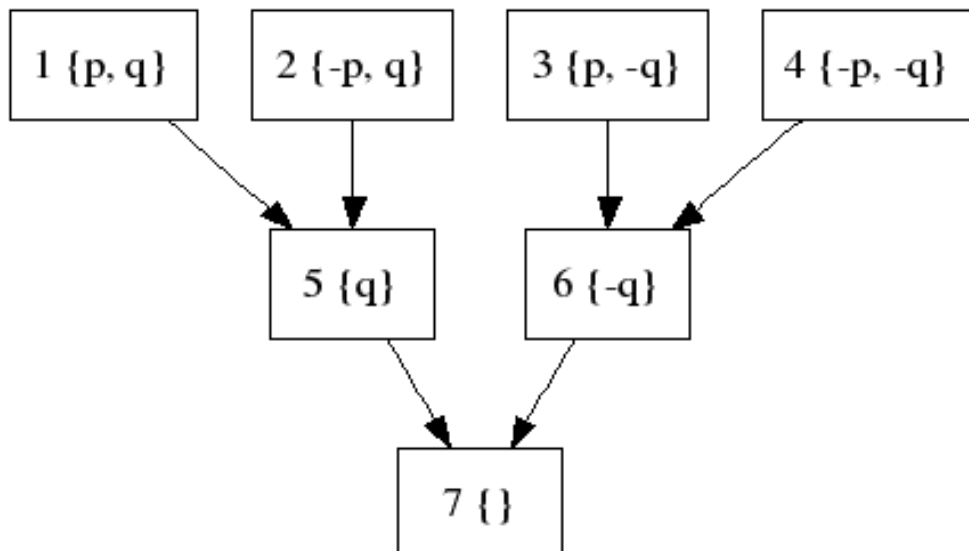
## Ejemplo de refutación por resolución

► Refutación de  $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  :

- |   |                      |                     |
|---|----------------------|---------------------|
| 1 | $\{p, q\}$           | Hipótesis           |
| 2 | $\{\neg p, q\}$      | Hipótesis           |
| 3 | $\{p, \neg q\}$      | Hipótesis           |
| 4 | $\{\neg p, \neg q\}$ | Hipótesis           |
| 5 | $\{q\}$              | Resolvente de 1 y 2 |
| 6 | $\{\neg q\}$         | Resolvente de 3 y 4 |
| 7 | $\square$            | Resolvente de 5 y 6 |

## Ejemplo de grafo de refutación por resolución

► Grafo de refutación de  $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  :



## Demostraciones por resolución entre cláusulas

Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.

- ▶ La sucesión  $(C_1, \dots, C_n)$  es una **demostración por resolución** de la cláusula  $C$  a partir de  $S$  si  $C = C_n$  y para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  se verifica una de las siguientes condiciones:
  - ▶  $C_i \in S$ ;
  - ▶ existen  $j, k < i$  tales que  $C_i$  es una resolvente de  $C_j$  y  $C_k$
- ▶ La cláusula  $C$  es **demostrable por resolución** a partir de  $S$  si existe una demostración por resolución de  $C$  a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{Res} C$
- ▶ Una **refutación por resolución** de  $S$  es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de  $S$ .
- ▶ Se dice que  $S$  es **refutable por resolución** si existe una refutación por resolución a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{Res} \square$

## Demostraciones por resolución entre fórmulas

- ▶ Def.: Sean
  - $S_1, \dots, S_n$  formas clausales de las fórmulas  $F_1, \dots, F_n$  y
  - $S$  una forma clausal de  $\neg F$
 Una **demostración por resolución** de  $F$  a partir de  $\{F_1, \dots, F_n\}$  es una refutación por resolución de  $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ .
- ▶ Def.: La fórmula  $F$  es **demostrable por resolución** a partir de  $\{F_1, \dots, F_n\}$  si existe una demostración por resolución de  $F$  a partir de  $\{F_1, \dots, F_n\}$ . Se representa por  $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$ .
- ▶ Ejemplo:  $\{p \vee q, p \leftrightarrow q\} \vdash_{Res} \{p \vee q, p \leftrightarrow q\}$ 

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6



## Adecuación y completitud de la resolución

- ▶ Prop.: Si  $C$  es una resolvente de  $C_1$  y  $C_2$ , entonces  $\{C_1, C_2\} \models C$ .
- ▶ Prop.: Si  $\square \in S$ , entonces  $S$  es inconsistente.
- ▶ Prop.: Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
  - ▶ (Adecuación) Si  $S \vdash_{Res} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.
  - ▶ (Completitud) Si  $S$  es inconsistente, entonces  $S \vdash_{Res} \square$ .
- ▶ Prop.: Sean  $S$  un conjunto de fórmulas y  $F$  es una fórmula.
  - ▶ (Adecuación) Si  $S \vdash_{Res} F$ , entonces  $S \models F$ .
  - ▶ (Completitud) Si  $S \models F$ , entonces  $S \vdash_{Res} F$ .
- ▶ Nota: Sean  $C_1$  y  $C_2$  las cláusulas  $\{p\}$  y  $\{p, q\}$ , respectivamente. Entonces,
  - ▶  $\{C_1\} \models C_2$ .
  - ▶  $C_2$  no es demostrable por resolución a partir de  $\{C_1\}$ .
  - ▶ La fórmula de forma clausal  $C_1$  es  $F_1 = p$ .
  - ▶ La fórmula de forma clausal  $C_2$  es  $F_2 = p \vee q$ .
  - ▶  $\{F_1\} \vdash_{Res} F_2$ .

## Tema 7: Resolución proposicional

### 1. Lógica de cláusulas

### 2. Demostraciones por resolución

### 3. Algoritmos de resolución

Algoritmo de resolución por saturación

Algoritmo de saturación con simplificación

### 4. Refinamientos de resolución

### 5. Argumentación por resolución

## Algoritmo de de resolución por saturación

- ▶ Def.: Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.  
 $Res(S) = S \cup (\cup \{Res(C_1, C_2) : C_1, C_2 \in S\})$ .

- ▶ Algoritmo de resolución por saturación

**Entrada:** Un conjunto finito de cláusulas,  $S$ .

**Salida:** *Consistente*, si  $S$  es consistente;  
*Inconsistente*, en caso contrario.

$S' := \emptyset$

**mientras** ( $\square \notin S$ ) y ( $S \neq S'$ ) **hacer**

$S' := S$

$S := Res(S)$

**fmientras**

**si** ( $\square \in S$ ) **entonces**

    Devolver *Inconsistente*

**en caso contrario**

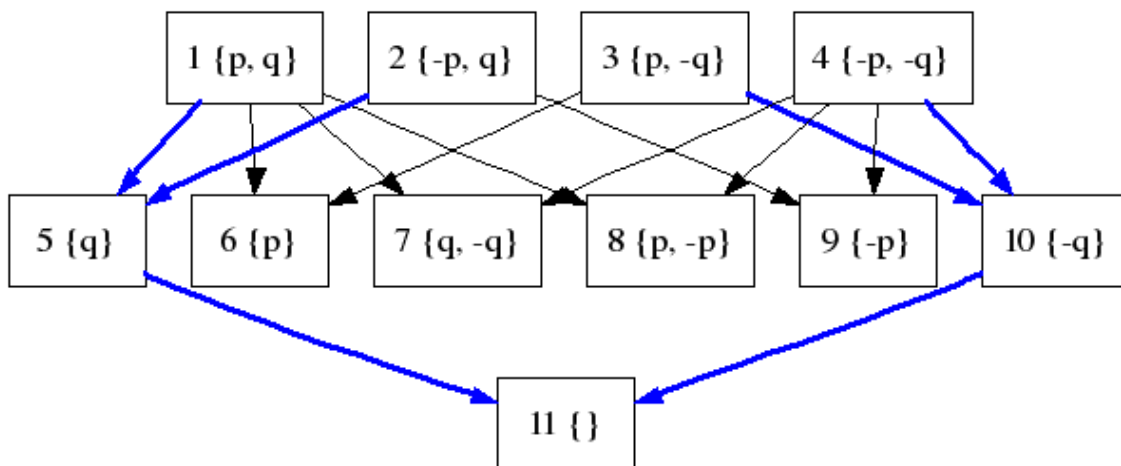
    Devolver *Consistente*

**fsi**

- ▶ Prop.: El algoritmo de resolución por saturación es correcto.

## Ejemplo de grafo de resolución por saturación

Grafo de  $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  :



Traza:

Paso	$S$	$S'$
0	{1, 2, 3, 4}	$\emptyset$
1	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	{1, 2, 3, 4}
2	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

## Algoritmo de saturación con simplificación

- ▶ Prop.: Si  $S_1 \subseteq S_2$  y  $S_2$  es consistente, entonces  $S_1$  es consistente.
- ▶ Prop.: Una cláusula es una tautología syss contiene un literal y su complementario.
- ▶ Prop.: Sea  $C \in S$  una tautología.  
Entonces  $S$  es consistente syss  $S \setminus \{C\}$  es consistente.
- ▶ Def.: La cláusula  $C$  **subsume** a la cláusula  $D$  si  $C \subset D$  (es decir,  $C \subseteq D$  y  $C \neq D$ ).
- ▶ Prop.: Si  $C$  subsume a  $D$ , entonces  $C \models D$ .
- ▶ Prop.: Sean  $C, D \in S$  tales que  $C$  subsume a  $D$ .  
Entonces  $S$  es consistente syss  $S \setminus \{D\}$  es consistente.
- ▶ Def.: El **simplificado** de un conjunto finito de cláusulas  $S$  es el conjunto obtenido de  $S$  suprimiendo las tautologías y las cláusulas subsumidas por otras; es decir,
 
$$\text{Simp}(S) = S - \{C \in S : (C \text{ es una tautología}) \text{ ó } (\text{existe } D \in S \text{ tal que } D \subset C)\}$$

21 / 37

## Algoritmo de saturación con simplificación

- ▶ Algoritmo de resolución por saturación con simplificación:

**Entrada:** Un conjunto finito de cláusulas,  $S$ .

**Salida:** *Consistente*, si  $S$  es consistente;  
*Inconsistente*, en caso contrario.

$S' := \emptyset$

**mientras** ( $\square \notin S$ ) y ( $S \neq S'$ ) **hacer**

$S' := S$

$S := \text{Simp}(\text{Res}(S))$

**fmientras**

**si** ( $\square \in S$ ) **entonces**

Devolver *Inconsistente*

**en caso contrario**

Devolver *Consistente*

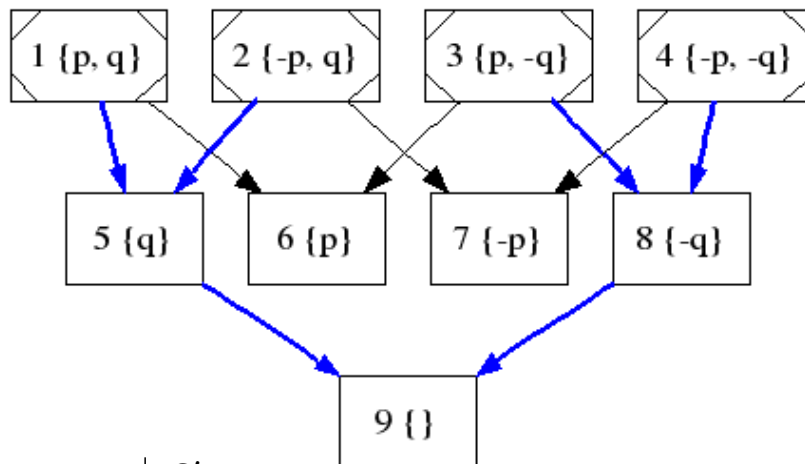
**fsi**

- ▶ Prop.: El algoritmo de resolución por saturación con simplificación es correcto.

22 / 37

## Grafo de resolución por saturación con simplificación

Resolución de  $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  :

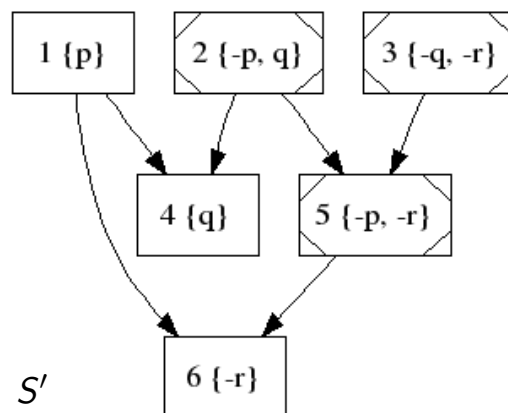


Traza:

Paso	S	S'
0	{1, 2, 3, 4}	$\emptyset$
1	{5, 6, 7, 8}	{1, 2, 3, 4}
2	{9}	{5, 6, 7, 8}

## Grafo de resolución por saturación con simplificación

Resolución de  $\{\{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, \neg r\}\}$  :



Traza:

Paso	S	S'
0	{1, 2, 3}	$\emptyset$
1	{1, 3, 4, 5}	{1, 2, 3}
2	{1, 4, 6}	{1, 3, 4, 5}
3	{1, 4, 6}	{1, 4, 5, 6}

Modelo:  $I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 0$ .

## Tema 7: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
  - Resolución positiva
  - Resolución negativa
  - Resolución unitaria
  - Resolución por entradas
  - Resolución lineal

### 5. Argumentación por resolución

25 / 37

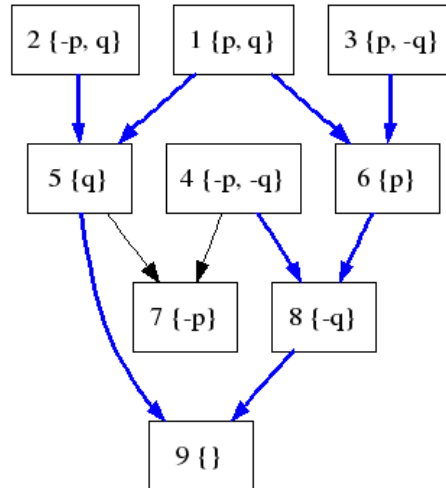
## Resolución positiva

- ▶ Def.: Un **literal positivo** es un átomo.
- ▶ Def.: Una **cláusula positiva** es un conjunto de literales positivos.
- ▶ Def.: Una **demostración por resolución positiva** es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula positiva.
- ▶ La cláusula  $C$  es **demostrable por resolución positiva** a partir del conjunto de cláusulas  $S$  si existe una demostración por resolución positiva de  $C$  a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{ResPos} C$ .
- ▶ Prop.: Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
  - ▶ (**Adecuación**) Si  $S \vdash_{ResPos} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.
  - ▶ (**Compleitud**) Si  $S$  es inconsistente, entonces  $S \vdash_{ResPos} \square$ .

26 / 37

## Grafo de resolución positiva

Grafo de  $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  :



Traza:	Paso	S	S'
	0	{1, 2, 3, 4}	$\emptyset$
	1	{4, 5, 6}	{1, 2, 3, 4}
	2	{5, 6, 7, 8}	{4, 5, 6}
	3	{9}	{5, 6, 7, 8}

## Resolución negativa

- ▶ Def.: Un **literal negativo** es la negación de un átomo.
- ▶ Def.: Una **cláusula negativa** es un conjunto de literales negativos.
- ▶ Def.: Una **demostración por resolución negativa** es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula negativa.
- ▶ La cláusula  $C$  es **demostrable por resolución negativa** a partir del conjunto de cláusulas  $S$  si existe una demostración negativa por resolución de  $C$  a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{ResNeg} C$ .
- ▶ Prop.: Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
  - ▶ (**Adecuación**) Si  $S \vdash_{ResNeg} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.
  - ▶ (**Completitud**) Si  $S$  es inconsistente, entonces  $S \vdash_{ResNeg} \square$ .

## Resolución unitaria

- ▶ Def.: Una **cláusula unitaria** es un conjunto formado por un único literal.
- ▶ Def.: Una **demostración por resolución unitaria** es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula unitaria.
- ▶ La cláusula  $C$  es **demostrable por resolución unitaria** a partir del conjunto de cláusulas  $S$  si existe una demostración por resolución unitaria de  $C$  a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{ResUni} C$ .
- ▶ Prop.: (**Adecuación**) Sea  $S$  un conjunto de cláusulas. Si  $S \vdash_{ResUni} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.

## Resolución unitaria

- ▶ Existen conjuntos de cláusulas  $S$  tales que  $S$  es inconsistente y  $S \not\vdash_{ResUni} \square$ .  
Dem.:  $S = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$
- ▶ Def.: Una **cláusula de Horn** es un conjunto de literales con un literal positivo como máximo.
- ▶ Ejemplos:  $\{p, \neg q, \neg r\}$ ,  $\{p\}$  y  $\{\neg p, \neg q\}$  son cláusulas de Horn.  
 $\{p, q, \neg r\}$  y  $\{p, r\}$  no son cláusulas de Horn.
- ▶ Prop.: Si  $S$  es un conjunto inconsistente de cláusulas de Horn, entonces  $S \vdash_{ResUni} \square$ .

## Resolución por entradas

- ▶ Def.: Una **demostración por resolución por entradas** a partir de  $S$  es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula de  $S$ .
- ▶ La cláusula  $C$  es **demostrable por resolución por entradas** a partir del conjunto de cláusulas  $S$  si existe una demostración por resolución por entradas de  $C$  a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{ResEnt} C$ .
- ▶ Prop.: (**Adecuación**) Sea  $S$  un conjunto de cláusulas. Si  $S \vdash_{ResEnt} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.
- ▶ Existen conjuntos de cláusulas  $S$  tales que  $S$  es inconsistente y  $S \not\vdash_{ResEnt} \square$ .  
Dem.:  $S = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$
- ▶ Prop.: Si  $S$  es un conjunto inconsistente de cláusulas de Horn, entonces  $S \vdash_{ResEnt} \square$ .

## Resolución lineal

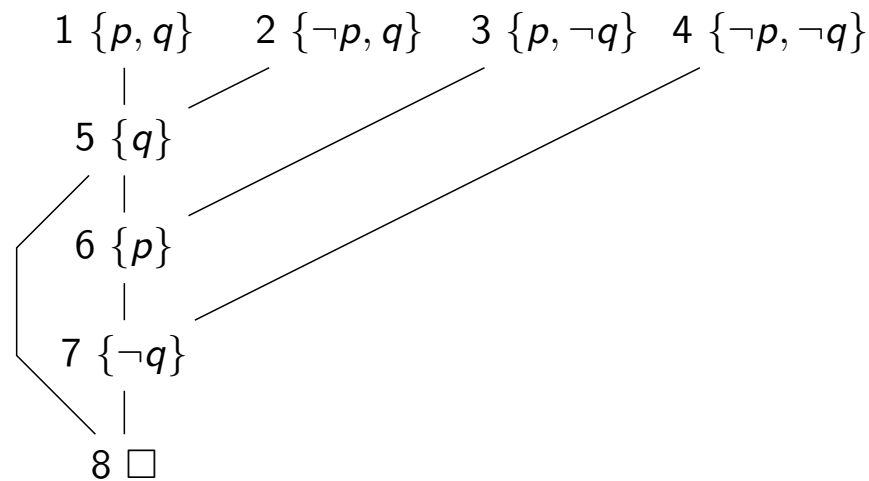
- ▶ Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
  - ▶ La sucesión  $(C_0, C_1, \dots, C_n)$  es una **resolución lineal** a partir de  $S$  si se cumplen las siguientes condiciones:
    1.  $C_0 \in S$ ;
    2. para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existe un  $B \in S \cup \{C_0, \dots, C_{i-1}\}$  tal que  $C_i \in Res(C_{i-1}, B)$ .
 La cláusula  $C_0$  se llama **cláusula base**, las  $C_i$  se llaman **cláusulas centrales** y las  $B$  se llaman **cláusulas laterales**.
  - ▶ La cláusula  $C$  es **deducible por resolución lineal** a partir de  $S$  si existe una deducción por resolución lineal a partir de  $S$ ,  $(C_0, \dots, C_n)$ , tal que  $C_n = C$ . Se representa por  $S \vdash_{ResLin} C$ .
- ▶ Prop.: Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
  - ▶ (**Adecuación**) Si  $S \vdash_{ResLin} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.
  - ▶ (**Completitud**) Si  $S$  es inconsistente, entonces  $S \vdash_{ResLin} \square$ .



## Resolución lineal

► Ejemplo: Resolución lineal de

$\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$



## Tema 7: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución

Formalización de argumentación por resolución

Decisión de argumentación por resolución

## Formalización de argumentación por resolución

► Problema de los animales: Se sabe que

1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras.

Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

► Formalización:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tiene\_pelos} \vee \text{da\_leche} \rightarrow \text{es\_mamífero}, \\ \text{es\_mamífero} \wedge (\text{tiene\_pezuñas} \vee \text{rumia}) \rightarrow \text{es\_ungulado}, \\ \text{es\_ungulado} \wedge \text{tiene\_cuello\_largo} \rightarrow \text{es\_jirafa}, \\ \text{es\_ungulado} \wedge \text{tiene\_rayas\_negras} \rightarrow \text{es\_cebra}, \\ \text{tiene\_pelos} \wedge \text{tiene\_pezuñas} \wedge \text{tiene\_rayas\_negras} \end{array} \right\}$$

$\vdash_{Res} \text{es\_cebra}$

## Decisión de argumentación por resolución

1	$\{\neg \text{tiene\_pelos}, \text{es\_mamífero}\}$	Hipótesis
2	$\{\neg \text{da\_leche}, \text{es\_mamífero}\}$	Hipótesis
3	$\{\neg \text{es\_mamífero}, \neg \text{tiene\_pezuñas}, \text{es\_ungulado}\}$	Hipótesis
4	$\{\neg \text{es\_mamífero}, \neg \text{rumia}, \text{es\_ungulado}\}$	Hipótesis
5	$\{\neg \text{es\_ungulado}, \neg \text{tiene\_cuello\_largo}, \text{es\_jirafa}\}$	Hipótesis
6	$\{\neg \text{es\_ungulado}, \neg \text{tiene\_rayas\_negras}, \text{es\_cebra}\}$	Hipótesis
7	$\{\text{tiene\_pelos}\}$	Hipótesis
8	$\{\text{tiene\_pezuñas}\}$	Hipótesis
9	$\{\text{tiene\_rayas\_negras}\}$	Hipótesis
10	$\{\neg \text{es\_cebra}\}$	Hipótesis
11	$\{\text{es\_mamífero}\}$	Resolvente de 1 y 7
12	$\{\neg \text{tiene\_pezuñas}, \text{es\_ungulado}\}$	Resolvente de 11 y 3
13	$\{\text{es\_ungulado}\}$	Resolvente de 12 y 8
14	$\{\neg \text{tiene\_rayas\_negras}, \text{es\_cebra}\}$	Resolvente de 13 y 6
15	$\{\text{es\_cebra}\}$	Resolvente de 14 y 9
16	□	Resolvente de 15 y 10

## Bibliografía

1. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.)*. (Springer, 2001).  
Cap. 4: Propositional calculus: resolution and BDDs.
2. C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973).  
Cap. 5.2: The resolution principle for the propositional logic.
3. N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001).  
Cap. 14: La resolución en el cálculo proposicional.
4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003).  
Cap. 5.7: El principio de resolución en lógica proposicional.
5. U. Schöning *Logic for Computer Scientists* (Birkäuser, 1989).  
Cap. 1.5: Resolution.