

Lógica informática (2008–09)

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

1. Introducción
2. Sintaxis de la lógica proposicional
3. Semántica proposicional

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

1. Introducción

Panorama de la lógica

Ejemplos de argumentos y formalizaciones

2. Sintaxis de la lógica proposicional

3. Semántica proposicional

Lógica

- ▶ **Objetivos de la lógica:**
 - ▶ La formalización del lenguaje natural.
 - ▶ Los métodos de razonamiento.
- ▶ **Sistemas lógicos:**
 - ▶ Lógica proposicional.
 - ▶ Lógica de primer orden.
 - ▶ Lógicas de orden superior.
 - ▶ Lógicas modales.
 - ▶ Lógicas descriptivas.
- ▶ **Aplicaciones de la lógica en computación:**
 - ▶ Programación lógica.
 - ▶ Verificación y síntesis automática de programas.
 - ▶ Representación del conocimiento y razonamiento.
 - ▶ Modelización y razonamiento sobre sistemas.
- ▶ **Lógica informática = Representación del conocimiento + Razonamiento**

Argumentos y formalización

- ▶ Ejemplos de argumentos:
 - ▶ Ejemplo 1: Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. *Por tanto*, habían taxis en la estación.
 - ▶ Ejemplo 2: Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. *Por tanto*, la lámpara está fundida.

- ▶ Formalización:

- ▶ Simbolización:

| Simb. | Ejemplo 1 | Ejemplo 2 |
|-------|-------------------------------|---------------------------|
| p | el tren llega a las 7 | hay corriente |
| q | hay taxis en la estación | la lámpara está fundida |
| r | Juan llega tarde a la reunión | la lámpara está encendida |

- ▶ Si p y no q , entonces r . No r . p . Por tanto, q .
- ▶ $p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p \models q$.

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

1. Introducción

2. Sintaxis de la lógica proposicional

El lenguaje de la lógica proposicional
 Recursión e inducción sobre fórmulas
 Árboles de análisis (o de formación)
 Eliminación de paréntesis
 Subfórmulas

3. Semántica proposicional

El lenguaje de la lógica proposicional

- ▶ Alfabeto proposicional:
 - ▶ variables proposicionales: $p_0, p_1, \dots; p, q, r$.
 - ▶ conectivas lógicas:
 - ▶ monaria: \neg (negación),
 - ▶ binarias: \wedge (conjunción), \vee (disyunción),
 \rightarrow (condicional), \leftrightarrow (bicondicional).
 - ▶ símbolos auxiliares: “(“ y “)””.
- ▶ Fórmulas proposicionales:
 - ▶ Definición:
 - ▶ Las variables proposicionales son fórmulas (fórmulas atómicas).
 - ▶ Si F y G son fórmulas, entonces también lo son $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$
 - ▶ Ejemplos:
 - ▶ Fórmulas: p , $(p \vee \neg q)$, $\neg(p \vee p)$, $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$
 - ▶ No fórmulas: (p) , $p \vee \neg q$, $(p \vee \wedge q)$

Fórmulas proposicionales (BNF)

- ▶ Notaciones:
 - ▶ p, q, r, \dots representarán variables proposicionales.
 - ▶ F, G, H, \dots representarán fórmulas.
 - ▶ VP representa el conjunto de los variables proposicionales.
 - ▶ $Prop$ representa el conjunto de las fórmulas.
 - ▶ $*$ representa una conectiva binaria.
- ▶ Forma de Backus Naur (BNF) de las fórmula proposicionales:
 - ▶ $F ::= p \mid \neg G \mid (F \wedge G) \mid (F \vee G) \mid (F \rightarrow G) \mid (F \leftrightarrow G)$.

Definiciones por recursión sobre fórmulas

▶ **Número de paréntesis de una fórmula:**

- ▶ Def: El número de paréntesis de una fórmula F se define recursivamente por:

$$np(F) = \begin{cases} 0, & \text{si } F \text{ es atómica;} \\ np(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ 2 + np(G) + np(H), & \text{si } F \text{ es } (G * H) \end{cases}$$

▶ **Ejemplos:**

- ▶ $np(p) = 0$
- ▶ $np(q) = 0$
- ▶ $np(\neg q) = 0$
- ▶ $np((\neg q \vee p)) = 2$
- ▶ $np((p \rightarrow (\neg q \vee p))) = 4$

Demostración por inducción sobre fórmulas

▶ **Principio de inducción sobre fórmulas:** Sea \mathcal{P} una propiedad sobre las fórmulas que verifica las siguientes condiciones:

- ▶ Todas las fórmulas atómicas tienen la propiedad \mathcal{P} .
- ▶ Si F y G tienen la propiedad \mathcal{P} , entonces $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$, tienen la propiedad \mathcal{P} .

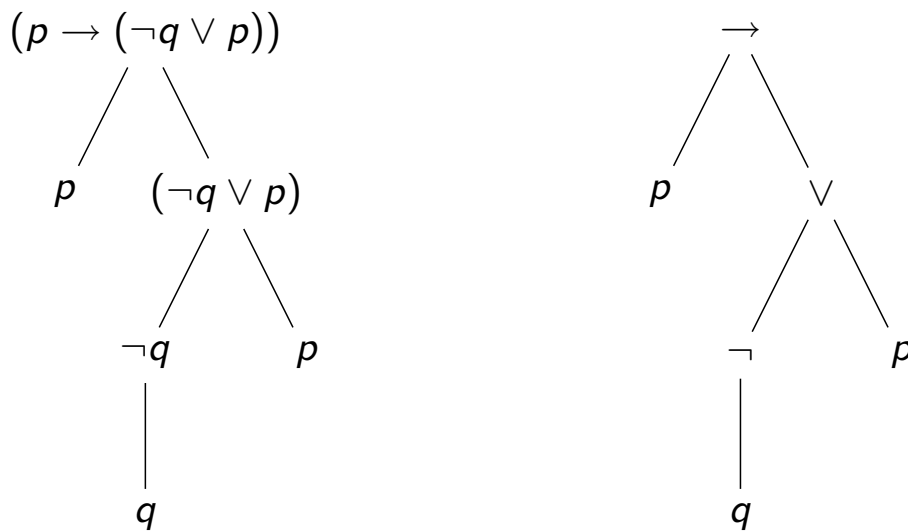
Entonces todas las fórmulas proposicionales tienen la propiedad \mathcal{P} .

▶ **Propiedad:** Todas las fórmulas proposicionales tienen un número par de paréntesis.

▶ **Demostración por inducción sobre las fórmulas.**

- ▶ **Base:** F atómica $\implies np(F) = 0$ es par.
- ▶ **Paso:** Supongamos que $np(F)$ y $np(G)$ es par (**hipótesis de inducción**). Entonces,
 - $np(\neg F) = np(F)$ es par y
 - $np((F * G)) = 2 + np(F) + np(G)$ es par,
 para cualquier conectiva binaria $*$.

Árboles de análisis (o de formación)



Criterios de reducción de paréntesis

- ▶ Pueden eliminarse los paréntesis externos.
 $F \wedge G$ es una abreviatura de $(F \wedge G)$.
- ▶ Precedencia de asociación de conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
 $F \wedge G \rightarrow \neg F \vee G$ es una abreviatura de
 $((F \wedge G) \rightarrow (\neg F \vee G))$.
- ▶ Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.

$$\begin{array}{ll}
 F \vee G \vee H & \text{abrevia } (F \vee (G \vee H)) \\
 F \wedge G \wedge H \rightarrow \neg F \vee G & \text{abrevia } ((F \wedge (G \wedge H)) \rightarrow (\neg F \vee G))
 \end{array}$$

Subfórmulas

- ▶ Def: El conjunto $\text{Subf}(F)$ de las **subfórmulas** de una fórmula F se define recursivamente por:

$$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es atómica;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H \end{cases}$$

- ▶ Ejemplos:

- ▶ $\text{Subf}(p) = \{p\}$
- ▶ $\text{Subf}(q) = \{q\}$
- ▶ $\text{Subf}(\neg q) = \{\neg q, q\}$
- ▶ $\text{Subf}(\neg q \vee p) = \{\neg q \vee p, \neg q, q, p\}$
- ▶ $\text{Subf}(p \rightarrow \neg q \vee p) = \{p \rightarrow \neg q \vee p, p, \neg q \vee p, \neg q, q\}$

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

1. Introducción

2. Sintaxis de la lógica proposicional

3. Semántica proposicional

Valores y funciones de verdad

Interpretaciones

Modelos, satisfacibilidad y validez

Algoritmos para satisfacibilidad y validez

Selección de tautologías

Equivalencia lógica

Modelos de conjuntos de fórmulas

Consistencia y consecuencia lógica

Argumentaciones y problemas lógicos

Valores y funciones de verdad

▶ Valores de verdad (\mathbb{B}): 1: verdadero y 0: falso.

▶ Funciones de verdad:

▶ $H_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ t.q. $H_{\neg}(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{si } i = 1. \end{cases}$

▶ $H_{\wedge} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ t.q. $H_{\wedge}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

▶ $H_{\vee} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ t.q. $H_{\vee}(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

▶ $H_{\rightarrow} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ t.q. $H_{\rightarrow}(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

▶ $H_{\leftrightarrow} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ t.q. $H_{\leftrightarrow}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Interpretaciones de fórmulas

▶ Funciones de verdad mediante **tablas de verdad**:

| i | $\neg i$ | i | j | $i \wedge j$ | $i \vee j$ | $i \rightarrow j$ | $i \leftrightarrow j$ |
|-----|----------|-----|-----|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

▶ Interpretación:

▶ Def.: Una **interpretación** es una aplicación $I : VP \rightarrow \mathbb{B}$.

▶ Prop: Para cada interpretación I existe una única aplicación $I' : Prop \rightarrow \mathbb{B}$ tal que:

$$I'(F) = \begin{cases} I(F), & \text{si } F \text{ es atómica;} \\ H_{\neg}(I'(G)), & \text{si } F = \neg G; \\ H_{*}(I'(G), I'(H)), & \text{si } F = G * H \end{cases}$$

Se dice que $I'(F)$ es el **valor de verdad de F respecto de I** .

Interpretaciones de fórmulas

- ▶ Ejemplo: Sea $F = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
 - ▶ valor de F en una interpretación I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$

$$\begin{array}{ccc} (p \vee q) & \wedge & (\neg q \vee r) \\ (1 \vee 0) & \wedge & (\neg 0 \vee 1) \\ 1 & \wedge & (1 \vee 1) \\ 1 & \wedge & 1 \\ & & 1 \end{array}$$
 - ▶ valor de F en una interpretación I_2 tal que $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$

$$\begin{array}{ccc} (p \vee q) & \wedge & (\neg q \vee r) \\ 0 \vee 0 & \wedge & (\neg 0 \vee 1) \\ 0 & \wedge & 1 \end{array}$$
- ▶ Prop.: Sea F una fórmula y I_1, I_2 dos interpretaciones. Si $I_1(p) = I_2(p)$ para todas las variables proposicionales de F , entonces $I_1'(F) = I_2'(F)$.
- ▶ Notación: Se escribe $I(F)$ en lugar de $I'(F)$.

Modelos y satisfacibilidad

- ▶ Modelo de una fórmula
 - ▶ Def.: I es modelo de F si $I(F) = 1$.
 - ▶ Notación: $I \models F$.
 - ▶ Ejemplo (continuación del anterior):
 - si $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$, entonces $I_1 \models (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
 - si $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$, entonces $I_2 \not\models (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$.
- ▶ Fórmulas satisfacibles e insatisfacibles
 - ▶ Def.: F es satisfacible si F tiene algún modelo.
 - ▶ Ejemplo: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ es satisfacible

$$I(p) = I(q) = I(r) = 0.$$
 - ▶ Def.: F es insatisfacible si F no tiene ningún modelo.
 - ▶ Ejemplo: $p \wedge \neg p$ es insatisfacible

| p | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|-----|----------|-------------------|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |

Tautologías y contradicciones

- ▶ Def.: F es una **tautología** (o **válida**) si toda interpretación es modelo de F . Se representa por $\models F$.
- ▶ Def.: F es una **contradicción** si ninguna interpretación es modelo de F .
- ▶ Def.: F es **contingente** si no es tautología ni contradicción.
- ▶ Ejemplos:
 1. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es una tautología.
 2. $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$ es una contradicción.
 3. $p \rightarrow q$ es contingente.

| p | q | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ | $\neg(p \rightarrow q)$ | $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|--|-------------------------|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Clasificaciones de fórmulas

| | | |
|---|--|---|
| Todas las fórmulas | | |
| Tautologías | Contingentes | Contradicciones |
| Verdadera en todas las interpretaciones (ej. $p \vee \neg p$) | Verdadera en algunas interpretaciones y falsa en otras (ej. $p \rightarrow q$) | Falsa en todas las interpretaciones (ej. $p \wedge \neg p$) |
| Satisfacibles | | Insatisfacibles |
| Todas las fórmulas | | |

Satisfacibilidad y validez

- ▶ Los problemas SAT y TAUT:
 - ▶ **Problema SAT:** Dada F determinar si es satisfacible.
 - ▶ **Problema TAUT:** Dada F determinar si es una tautología.
- ▶ Relaciones entre satisfacibilidad y tautologicidad:
 - ▶ F es tautología $\iff \neg F$ es insatisfacible.
 - ▶ F es tautología $\implies F$ es satisfacible.
 - ▶ F es satisfacible $\not\implies \neg F$ es insatisfacible.

$p \rightarrow q$ es satisfacible.

$$I(p) = I(q) = 1$$

$\neg(p \rightarrow q)$ es satisfacible.

$$I(p) = 1, I(q) = 0.$$

Algoritmos para SAT y TAUT

- ▶ Tabla de verdad para $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$:

| p | q | $(p \rightarrow q)$ | $(q \rightarrow p)$ | $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ |
|-----|-----|---------------------|---------------------|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

- ▶ Tabla de verdad simplificada para $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$:

| p | q | $(p \rightarrow q)$ | \vee | $(q \rightarrow p)$ |
|-----|-----|---------------------|--------|---------------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Algoritmos para SAT y TAUT

- ▶ Método de Quine para $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

$$\begin{array}{cccc}
 (p \rightarrow q) & \vee & (q \rightarrow p) & \\
 0 & & 0 & \\
 & & 1 & 0 \\
 0 & 1 & & \\
 & 1 & &
 \end{array}$$

- ▶ Método de Quine para $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

$$\begin{array}{cccccc}
 (p \rightarrow q) & \vee & (q \rightarrow p) & & & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & * & & & &
 \end{array}$$

Algoritmos para SAT y TAUT

- ▶ Tablas de verdad para $\not\models (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$

| p | q | $(p \leftrightarrow q)$ | $(q \leftrightarrow p)$ | $(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$ |
|-----|-----|-------------------------|-------------------------|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

- ▶ Método de Quine para $\not\models (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$

$$\begin{array}{cccccc}
 (p \leftrightarrow q) & \vee & (q \leftrightarrow p) & & & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Selección de tautologías

1. $F \rightarrow F$ (ley de identidad).
2. $F \vee \neg F$ (ley del tercio excluido).
3. $\neg(F \wedge \neg F)$ (principio de no contradicción).
4. $(\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$ (ley de Clavius).
5. $\neg F \rightarrow (F \rightarrow G)$ (ley de Duns Scoto).
6. $((F \rightarrow G) \rightarrow F) \rightarrow F$ (ley de Peirce).
7. $(F \rightarrow G) \wedge F \rightarrow G$ (modus ponens).
8. $(F \rightarrow G) \wedge \neg G \rightarrow \neg F$ (modus tollens).

Fórmulas equivalentes

- ▶ Def.: F y G son **equivalentes** si $I(F) = I(G)$ para toda interpretación I . Representación: $F \equiv G$.
- ▶ Ejemplos de equivalencias notables:
 1. Idempotencia: $F \vee F \equiv F$; $F \wedge F \equiv F$.
 2. Conmutatividad: $F \vee G \equiv G \vee F$; $F \wedge G \equiv G \wedge F$.
 3. Asociatividad: $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$;
 $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$
 4. Absorción: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$; $F \vee (F \wedge G) \equiv F$.
 5. Distributividad: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$;
 $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$.
 6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.
 7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$;
 $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$
 8. Leyes de tautologías: Si F es una tautología,
 $F \wedge G \equiv G$; $F \vee G \equiv F$.
 9. Leyes de contradicciones: Si F es una contradicción
 $F \wedge G \equiv F$; $F \vee G \equiv G$.

Propiedades de la equivalencia lógica

- ▶ Relación entre equivalencia y bicondicional:
 - ▶ $F \equiv G \text{ syss } \models F \leftrightarrow G$.
- ▶ Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
 - ▶ Reflexiva: $F \equiv F$.
 - ▶ Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$.
 - ▶ Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$.
- ▶ Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
 - ▶ Prop.: Si en la fórmula F se sustituye una de sus subfórmulas G por una fórmula G' lógicamente equivalente a G , entonces la fórmula obtenida, F' , es lógicamente equivalente a F .
 - ▶ Ejemplo:

$$\begin{aligned} F &= \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg\neg r) \\ G &= \neg(p \wedge q) \\ G' &= \neg p \vee \neg q \\ F' &= (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg\neg r) \end{aligned}$$

Modelo de conjuntos de fórmulas

- ▶ Notación:
 - ▶ S, S_1, S_2, \dots representarán conjuntos de fórmulas.
- ▶ Modelo de un conjunto de fórmulas:
 - ▶ Def.: I es modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $I \models F$.
 - ▶ Representación: $I \models S$.
 - ▶ Ejemplo: Sea $S = \{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), q \rightarrow r\}$
 La interpretación I_1 tal que $I_1(p) = 1, I_1(q) = 0, I_1(r) = 1$ es modelo de S ($I_1 \models S$).

$$\begin{array}{cccccccccc} \{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), & q \rightarrow r\} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$
 - La interpretación I_2 tal que $I_2(p) = 0, I_2(q) = 1, I_2(r) = 0$ no es modelo de S ($I_2 \not\models S$).

$$\begin{array}{cccccccccc} \{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), & q \rightarrow r\} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Conjunto consistente de fórmulas

- ▶ Def.: S es consistente si S tiene algún modelo.
- ▶ Def.: S es inconsistente si S no tiene ningún modelo.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ $\{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \rightarrow r\}$ es consistente (con modelos I_4, I_6, I_8)
 - ▶ $\{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \rightarrow r, \neg r\}$ es inconsistente

| | p | q | r | $(p \vee q)$ | $(\neg q \vee r)$ | $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$ | $p \rightarrow r$ | $\neg r$ |
|-------|-----|-----|-----|--------------|-------------------|-------------------------------------|-------------------|----------|
| I_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| I_2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| I_3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| I_4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| I_5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| I_6 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| I_7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| I_8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Consecuencia lógica

- ▶ Def.: F es consecuencia de S si todos los modelos de S son modelos de F .
- ▶ Representación: $S \models F$.
- ▶ Ejemplos: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$ y $\{p\} \not\models p \wedge q$

| | p | q | r | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow r$ | $p \rightarrow r$ | p | q | $p \wedge q$ |
|-------|-----|-----|-----|-------------------|-------------------|-------------------|-----|-----|--------------|
| I_1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| I_2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| I_3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| I_4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| I_5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | |
| I_6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | | | |
| I_7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | |
| I_8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |

Propiedades de la consecuencia

- ▶ Propiedades básicas de la relación de consecuencia:
 - ▶ Reflexividad: $S \models S$.
 - ▶ Monotonía: Si $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2 \models F$.
 - ▶ Transitividad: Si $S \models F$ y $\{F\} \models G$, entonces $S \models G$.
- ▶ Relación entre consecuencia, validez, satisfacibilidad y consistencia:
 - ▶ Las siguientes condiciones son equivalentes:
 1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$
 2. $\models F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow G$
 3. $\neg(F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow G)$ es insatisfacible
 4. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente

Ejemplo de argumentación

- ▶ Problema de los animales: Se sabe que
 1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
 2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
 3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
 4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras.

Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

- ▶ Formalización:

$$\{ \begin{array}{l} \text{tiene_pelos} \vee \text{da_leche} \rightarrow \text{es_mamífero}, \\ \text{es_mamífero} \wedge (\text{tiene_pezuñas} \vee \text{rumia}) \rightarrow \text{es_ungulado}, \\ \text{es_ungulado} \wedge \text{tiene_cuello_largo} \rightarrow \text{es_jirafa}, \\ \text{es_ungulado} \wedge \text{tiene_rayas_negras} \rightarrow \text{es_cebra}, \\ \text{tiene_pelos} \wedge \text{tiene_pezuñas} \wedge \text{tiene_rayas_negras} \end{array} \}$$

$$\models \text{es_cebra}$$

Problemas lógicos: veraces y mentirosos

- ▶ Enunciado: En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase

1. A dice "B y C son veraces syss C es veraz"
2. B dice "Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso"
3. C dice "B es mentiroso syss A o B es veraz"

Determinar a qué tribu pertenecen A, B y C.

- ▶ Simbolización: a : "A es veraz", b : "B es veraz", c : "C es veraz".

- ▶ Formalización:

$$F_1 = a \leftrightarrow (b \wedge c \leftrightarrow c), F_2 = b \leftrightarrow (a \wedge c \rightarrow b \wedge c \wedge \neg a) \text{ y}$$

$$F_3 = c \leftrightarrow (\neg b \leftrightarrow a \vee b).$$

- ▶ Modelos de $\{F_1, F_2, F_3\}$:

Si I es modelo de $\{F_1, F_2, F_3\}$, entonces $I(a) = 1, I(b) = 1, I(c) = 0$.

- ▶ Conclusión: A y B son veraces y C es mentiroso.

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000)
 Cap. 0 (Introducción), 6 (Sintaxis de la lógica proposicional), 7 (Semántica de la lógica proposicional), 9 (Consecuencia lógica) y 11 (Lógica proposicional y lenguaje natural).
2. M. Ben-Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.)*. (Springer, 2001)
 Cap. 1 (Introduction) y 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).
3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)
 Cap. 2 (El lenguaje de la lógica proposicional) y 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).
4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000)
 Cap. 1 (Propositional logic).