Lógica informática (2008–09)

Tema 3: Tableros semánticos

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 3: Tableros semánticos

Tema 3: Tableros semánticos

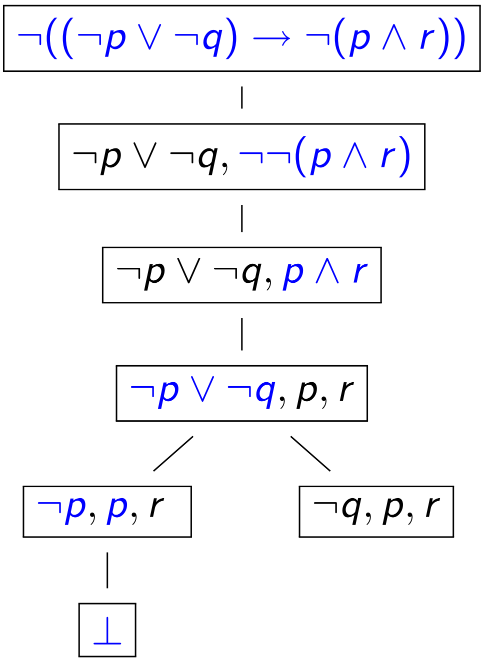
Búsqueda exitosa de modelos

- Búsqueda de modelos de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$

$$\begin{array}{ll}
 & I \models \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)) \\
\text{syss} & I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge r)\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge r\} \\
\text{syss} & I \models \{p, r, \neg p \vee \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, r, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{\bot\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\}
\end{array}$$

- Modelos de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$:
  Las interpretaciones I tales que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ e $I(r) = 1$.

Búsqueda exitosa de modelos por tableros semánticos



Búsqueda fallida de modelos

- Búsqueda de modelos de $\neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q))$.

$$
\begin{array}{ll}
 & I \models \neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q)) \\
\text{syss} & I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q))\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge q)\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, q, \neg p \vee \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, q, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, q, \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{\perp\} \text{ ó } I \models \{\perp\}
\end{array}
$$

- La fórmula $\neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q))$ no tiene modelos (es insatisfacible).

Búsqueda fallida de modelos por tableros semánticos

$$\boxed{\neg((\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land q))}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land q)}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, p \land q}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, p, q}$$

$$\boxed{\neg p, p, q} \qquad \boxed{\neg q, p, q}$$

$$\boxed{\bot} \qquad \boxed{\bot}$$

Tema 3: Tableros semánticos

Notación uniforme: Literales y dobles negaciones

- Literales
  - Un literal es un átomo o la negación de un átomo (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
  - $I \models p$ syss $I(p) = 1$.
  - $I \models \neg p$ syss $I(p) = 0$.
- Dobles negaciones
  - F es una doble negación si es de la forma $\neg\neg G$.
  - $I \models \neg\neg G$ syss $I \models G$.
- Reducción de modelos:
  - $I \models F \land G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
  - $I \models F \lor G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.

Notación uniforme: Fórmulas alfa y beta

- Las fórmulas alfa, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$A_1 \land A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \lor A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

- Si F es alfa con componentes F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \land F_2$.
- Las fórmulas beta, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$B_1 \lor B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \land B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

- Si F es beta con componentes F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \lor F_2$.

Tema 3: Tableros semánticos

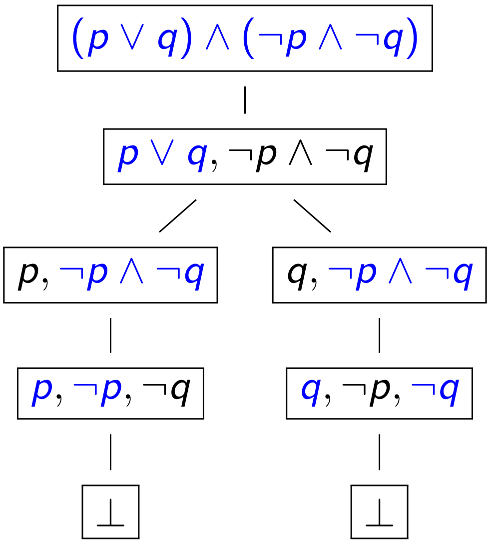
Tablero del conjunto de fórmulas S

Un tablero del conjunto de fórmulas S es un árbol construido mediante las reglas:

- El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta S es un tablero de S.
- Sea $\mathcal{T}$ un tablero de S y S_1 la etiqueta de una hoja de $\mathcal{T}$.
  1. Si S_1 contiene una fórmula y su negación, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $\{\perp\}$ es un tablero de S.
  2. Si S_1 contiene una doble negación $\neg\neg F$, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$ es un tablero de S.
  3. Si S_1 contiene una fórmula alfa F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$ es un tablero de S.
  4. Si S_1 contiene una fórmula beta F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de S_1 los nodos etiquetados con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1\}$ y $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_2\}$ es un tablero de S.

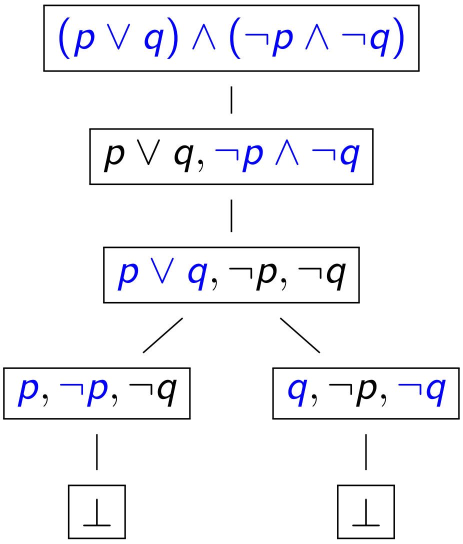
No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Un tablero completo de $(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)$ es



No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Otro tablero completo de $(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)$ es



Tema 3: Tableros semánticos

Modelos por tableros

- Def.: Sea S un conjunto de fórmulas, $\mathcal{T}$ un tablero de S.
  - Una hoja de $\mathcal{T}$ es cerrada si contiene una fórmula y su negación o es de la forma $\{\bot\}$.
  - Una hoja de $\mathcal{T}$ es abierta si es un conjunto de literales y no contiene un literal y su negación.
- Def.: Un tablero completo de S es un tablero de S tal que todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- Def.: Un tablero es cerrado si todas sus hojas son cerradas.
- Reducción de modelos:
  - $I \models F \land G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
  - $I \models F \lor G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.
- Propiedades:
  1. Si las hojas de un tablero del conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son $\{G_{1,1}, \dots, G_{1,n_1}\}, \dots, \{G_{m,1}, \dots, G_{m,n_m}\}$, entonces $F_1 \land \dots \land F_n \equiv (G_{1,1} \land \dots \land G_{1,n_1}) \lor \dots \lor (G_{m,1} \land \dots \land G_{m,n_m})$.
  2. Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas, $\mathcal{T}$ un tablero de S e I una interpretación. Entonces, $I \models S$ syss existe una hoja S_1 de $\mathcal{T}$ tal que $I \models S_1$.

Tema 3: Tableros semánticos

Consistencia mediante tableros

- Prop.: Si $\{p_1, \dots, p_n, \neg q_1, \dots, \neg q_m\}$ es una hoja abierta de un tablero del conjunto de fórmulas S, entonces la interpretación I tal que $I(p_1) = 1, \dots, I(p_n) = 1$, $I(q_1) = 0, \dots, I(q_m) = 0$ es un modelo de S.
- Prop.: Un conjunto de fórmulas S es consistente syss S tiene un tablero con alguna hoja abierta.
- Prop.: Un conjunto de fórmulas S es inconsistente syss S tiene un tablero completo cerrado.

Tema 3: Tableros semánticos

Teorema por tableros

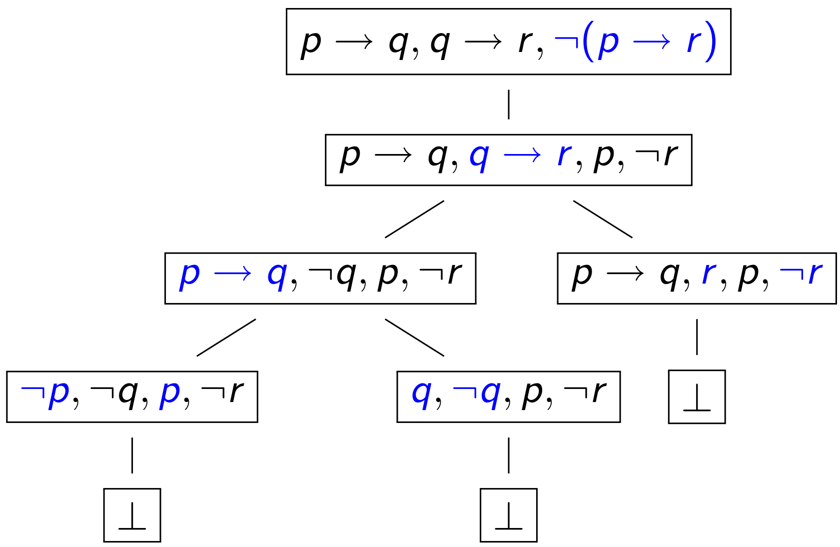
- Def.: Una fórmula F es un teorema (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si $\{\neg F\}$ tiene un tablero completo cerrado.
  Se representa por $\vdash_{Tab} F$.
- Ejemplos: $\vdash_{Tab} \neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)$
  $\nvdash_{Tab} \neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)$
- Teor.: El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,
  - Adecuado: $\vdash_{Tab} F \quad \Rightarrow \quad \models F$
  - Completo: $\models F \quad \Rightarrow \quad \vdash_{Tab} F$

Tema 3: Tableros semánticos

PD Tema 3: Tableros semánticos
└Deducción por tableros

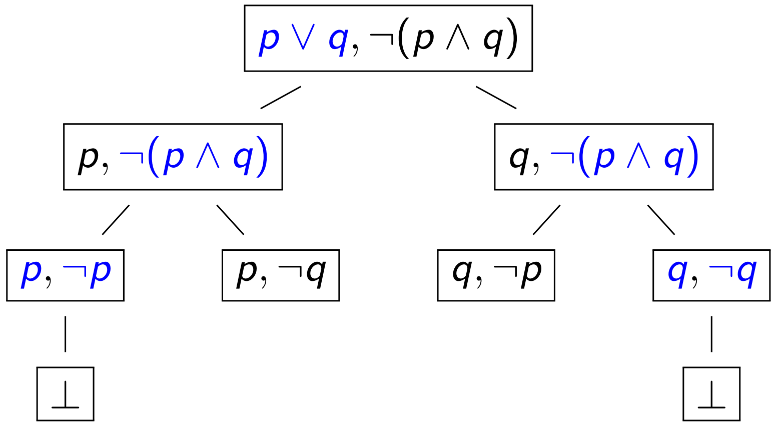
Deducción por tableros

- Def.: La fórmula F es deducible (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas S si existe un tablero completo cerrado de $S \cup \{\neg F\}$. Se representa por $S \vdash_{Tab} F$.
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$



Deducción por tableros

- Ejemplo: $\{p \lor q\} \nvdash_{Tab} p \land q$



- Contramodelos de $\{p \lor q\} \nvdash_{Tab} p \land q$

  las interpretaciones I_1 tales que $I_1(p) = 1$ e $I_1(q) = 0$

  las interpretaciones I_2 tales que $I_2(p) = 0$ e $I_2(q) = 1$
- Teor.: $S \vdash_{Tab} F$ syss $S \models F$.

Tema 3: Tableros semánticos

1. Búsqueda de modelos
2. Notación uniforme
3. Procedimiento de completación de tableros
4. Modelos por tableros semánticos
5. Consistencia mediante tableros
6. Teorema por tableros
7. Deducción por tableros

Tableros en notación reducida

- Ejemplo: $\{p \lor q\} \not\vdash_{Tab} p \land q$

1. $p \lor q$
2. $\neg(p \land q)$

3. p (1) | 4. q (1)

5. $\neg p$ (2) | 6. $\neg q$ (2) | 7. $\neg p$ (2) | 8. $\neg q$ (2)

Cerrada (5,3) | Abierta $\{p, \neg q\}$ | Abierta $\{\neg p, q\}$ | Cerrada (8,4)

Bibliografía

1. Ben–Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)
   Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux
2. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)
   Cap. 3: Semantic tableaux and resolution
3. Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)
   Cap. 7.9: Tableaux semánticos para la lógica de proposiciones
4. Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)
   Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
   Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas