Lógica informática (2008–09)

Tema 9: Formas normales de Skolem y cláusulas

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 9: Formas normales de Skolem y cláusulas

Tema 9: Formas normales de Skolem y cláusulas

Fórmula en forma rectificada

- Def.: F está en forma rectificada si ninguna variable aparece libre y ligada y cada cuantificador se refiere a una variable diferente.
- Ejemplos:
  $\forall x\ P(x) \to \forall y\ Q(z,y)$ está en forma rectificada
  $\forall x\ P(x) \to \forall y\ Q(x,y)$ no está en forma rectificada
  $\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(z,x)$ no está en forma rectificada
- Prop.: Para toda fórmula F existe una fórmula equivalente G en forma rectificada.
- Lema del renombramiento: Si y no aparece libre en F, entonces
$$\forall x\ F \equiv \forall y\ F[x/y]$$
$$\exists x\ F \equiv \exists y\ F[x/y].$$
- Ejemplos de rectificación:
$$\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(z,x) \equiv \forall x\ P(x) \to \forall u\ Q(z,u)$$
$$\forall x\ P(x) \to \forall y\ Q(x,y) \equiv \forall z\ P(z) \to \forall y\ Q(x,y)$$

Fórmula en forma normal prenexa

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa (FNP) si es de la forma $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) G$,
  donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.
  $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n)$ se llama el prefijo de F y G se llama la matriz de F.
- Ejemplos:

Fórmula	¿FNP?
$\neg \exists x \; [P(x) \to \forall x \; P(x)]$	no
$\forall x \; \exists y \; [P(x) \land \neg P(y)]$	sí
$\forall x \; P(x) \lor \exists y \; Q(y)$	no
$\forall x \; \exists y \; [P(x) \lor Q(y)]$	sí
$\exists y \; \forall x \; [P(x) \lor Q(y)]$	sí
$\neg(\forall x \; [P(x) \to Q(x)] \to \forall x \; [P(x) \to R(x)])$	no
$\exists z \; \forall x \; \forall y \; [((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land P(z)]$	sí

Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa rectificada:

1. Rectificar la fórmula usando las equivalencias
$$\forall x\ F \equiv \forall y\ F[x/y] \tag{1}$$
$$\exists x\ F \equiv \exists y\ F[x/y] \tag{2}$$
donde y es una variable que no ocurre libre en F.
2. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \land (G \rightarrow F) \tag{3}$$
3. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
$$F \rightarrow G \equiv \neg F \lor G \tag{4}$$

Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

4. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G \tag{5}$$
$$\neg(F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G \tag{6}$$
$$\neg\neg F \equiv F \tag{7}$$
$$\neg\forall x\ F \equiv \exists x\ \neg F \tag{8}$$
$$\neg\exists x\ F \equiv \forall x\ \neg F \tag{9}$$

5. Exteriorizar los cuantificadores usando las equivalencias

$$\forall x\ F \land G \equiv \forall x\ (F \land G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{11}$$
$$\forall x\ F \lor G \equiv \forall x\ (F \lor G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{12}$$
$$\exists x\ F \land G \equiv \exists x\ (F \land G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{13}$$
$$\exists x\ F \lor G \equiv \exists x\ (F \lor G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{14}$$
$$G \land \forall x\ F \equiv \forall x\ (G \land F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{15}$$
$$G \lor \forall x\ F \equiv \forall x\ (G \lor F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{16}$$
$$G \land \exists x\ F \equiv \exists x\ (G \land F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{17}$$
$$G \lor \exists x\ F \equiv \exists x\ (G \lor F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \tag{18}$$

Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo 1:

$$\begin{array}{lll} & \neg\exists x\,[P(x) \rightarrow \forall x\,P(x)] & \\ \equiv & \neg\exists x\,[P(x) \rightarrow \forall y\,P(y)] & \text{[por (1)]} \\ \equiv & \neg\exists x\,[\neg P(x) \vee \forall y\,P(y)] & \text{[por (4)]} \\ \equiv & \forall x\,[\neg(\neg P(x) \vee \forall y\,P(y))] & \text{[por (9)]} \\ \equiv & \forall x\,[\neg\neg P(x) \wedge \neg\forall y\,P(y)] & \text{[por (6)]} \\ \equiv & \forall x\,[P(x) \wedge \exists y\,\neg P(y)] & \text{[por (7 y 8)]} \\ \equiv & \forall x\,\exists y\,[P(x) \wedge \neg P(y)] & \text{[por (17)]} \end{array}$$

- Ejemplo 2:

$$\begin{array}{lll} & \forall x\,P(x) \vee \exists y\,Q(y) & \\ \equiv & \forall x\,[P(x) \vee \exists y\,Q(y)] & \text{[por (12)]} \\ \equiv & \forall x\,\exists y\,[P(x) \vee Q(y)] & \text{[por (18)]} \end{array}$$

- Ejemplo 3:

$$\begin{array}{lll} & \forall x\,P(x) \vee \exists y\,Q(y) & \\ \equiv & \exists y\,[\forall x\,P(x) \vee Q(y)] & \text{[por (18)]} \\ \equiv & \exists y\,\forall x\,[P(x) \vee Q(y)] & \text{[por (12)]} \end{array}$$

Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\forall x\,[P(x) \to Q(x)] \land \forall x\,[Q(x) \to R(x)] \to \forall x\,[P(x) \to R(x)]) & \\
\equiv & \neg(\forall x\,[P(x) \to Q(x)] \land \forall y\,[Q(y) \to R(y)] \to \forall z\,[P(z) \to R(z)]) & [\text{por } (1)] \\
\equiv & \neg(\neg(\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\,[\neg Q(y) \lor R(y)]) \lor \forall z\,[\neg P(z) \lor R(z)]) & [\text{por } (4)] \\
\equiv & \neg\neg(\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\,[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \neg\forall z\,[\neg P(z) \lor R(z)] & [\text{por } (6)] \\
\equiv & (\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\,[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \exists z\,[\neg(\neg P(z) \lor R(z))] & [\text{por } (7, 8)] \\
\equiv & (\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\,[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \exists z\,[\neg\neg P(z) \land \neg R(z)] & [\text{por } (6)] \\
\equiv & (\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\,[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \exists z\,[P(z) \land \neg R(z)] & [\text{por } (7)] \\
\equiv & \exists z\,[(\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land \forall y\,[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))] & [\text{por } (17)] \\
\equiv & \exists z\,[\forall x\,[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land \forall y\,[\neg Q(y) \lor R(y)]] \land (P(z) \land \neg R(z))] & [\text{por } (11)] \\
\equiv & \exists z\,\forall x\,[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land \forall y\,[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))] & [\text{por } (11)] \\
\equiv & \exists z\,\forall x\,[\forall y\,[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))] \land (P(z) \land \neg R(z))] & [\text{por } (15)] \\
\equiv & \exists z\,\forall x\,\forall y\,[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))] & [\text{por } (11)]
\end{array}
$$

Fórmula en forma normal prenexa conjuntiva

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa conjuntiva (FNPC) si es de la forma $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$, G no tiene cuantificadores y G está en forma normal conjuntiva.
- Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa conjuntiva:
  - Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa conjuntiva rectificada:
    1. Calcular una forma normal prenexa rectificada usando las equivalencias (1)–(18)
    2. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias
       $$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C) \quad (19)$$
       $$(A \land B) \lor C \equiv (A \lor C) \land (B \lor C) \quad (20)$$
  - Ejemplo de cálculo de una FNPC de $\forall x\ \exists y\ [P(x) \lor (Q(y) \land \neg R(y))]$:
    $$\begin{array}{ll} & \forall x\ \exists y\ [P(x) \lor (Q(y) \land \neg R(y))] \\ \equiv & \forall x\ \exists y\ [(P(x) \lor Q(y)) \land (P(x) \lor \neg R(y))] \quad \text{[por (19)]} \end{array}$$

Fórmula en forma de Skolem

- Forma de Skolem:
  - Def.: La fórmula F está en forma de Skolem (FS) si es de la forma $\forall x_1 \dots \forall x_n\ G$, donde $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.
  - Ejemplos:

$\forall x\ \exists y\ P(x,y)$	no está en forma de Skolem
$\forall x\ P(x, f(x))$	sí está en forma de Skolem
$\exists x\ Q(x)$	no está en forma de Skolem
$Q(a)$	sí está en forma de Skolem

- Equisatisfacibilidad:
  - Def.: Las fórmulas F y G son equisatisfacibles si:
    F es satisfacible syss G es satisfacible.
    Se representa por $F \equiv_{sat} G$
  - Ejemplos:

$\exists x\ Q(x)$	$\equiv_{sat}$	$Q(a)$
$\exists x\ Q(x)$	$\not\equiv$	$Q(a)$
$\forall x\ \exists y\ P(x,y)$	$\equiv_{sat}$	$\forall x\ P(x, f(x))$
$\forall x\ \exists y\ P(x,y)$	$\not\equiv$	$\forall x\ P(x, f(x))$

Algoritmo de cálculo de forma de Skolem

- Propiedades:
  - Si a es una constante que no ocurre en F, entonces $\exists x\ F \equiv_{sat} F[x/a]$.
  - Si g es un símbolo de función n–aria que no ocurre en F, entonces $\forall x_1 \ \dots \forall x_n \ \exists x\ F \equiv_{sat} \forall x_1 \ \dots \forall x_n \ F[x/g(x_1, \dots, x_n)]$.
- Algoritmo de cálculo de forma de Skolem:
  - Sea F una fórmula en forma normal prenexa rectificada, la forma de Skolem de F es

$$\text{Sko}(F) = \begin{cases} \text{Sko}(G[x/a]), & \text{si } F \text{ es } \exists x\ G \text{ y} \\ & a \text{ es una nueva constante;} \\ \text{Sko}(\forall x_1 \ \dots \forall x_n \ G[x/f(x_1, \dots, x_n)]), & \text{si } F \text{ es } \forall x_1 \ \dots \forall x_n \ \exists x\ G \text{ y} \\ & f \text{ es un nuevo símbolo de función;} \\ F, & \text{si } F \text{ está en forma de Skolem} \end{cases}$$

  - Propiedad: Si F es una fórmula en forma normal prenexa rectificada, entonces $\text{Sko}(F)$ está en forma de Skolem y $\text{Sko}(F) \equiv_{sat} F$.

Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo 1:
  $$\begin{aligned} & \text{Sko}(\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w\ P(x,y,z,u,v,w)) \\ & = \text{Sko}(\forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w\ P(a,y,z,u,v,w)) \\ & = \text{Sko}(\forall y\ \forall z\ \forall v\ \exists w\ P(a,y,z,f(y,z),v,w)) \\ & = \text{Sko}(\forall y\ \forall z\ \forall v\ P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))) \\ & = \forall y\ \forall z\ \forall v\ P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v)) \end{aligned}$$
- Ejemplo 2:
  $$\begin{aligned} & \text{Sko}(\forall x\ \exists y\ \forall z\ \exists w\ [\neg P(a,w) \vee Q(f(x),y)]) \\ & = \text{Sko}(\forall x\ \forall z\ \exists w\ [\neg P(a,w) \vee Q(f(x),h(x))]) \\ & = \text{Sko}(\forall x\ \forall z\ [\neg P(a,g(x,z)) \vee Q(f(x),h(x))]) \\ & = \forall x\ \forall z\ [\neg P(a,g(x,z)) \vee Q(f(x),h(x))] \end{aligned}$$

Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & \neg\exists x\ [P(x) \rightarrow \forall x\ P(x)] \\ \equiv & \forall x\ \exists y\ [P(x) \land \neg P(y)] \quad \text{[por página 8]} \\ \equiv_{sat} & \forall x\ [P(x) \land \neg P(f(x))] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & \forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y) \\ \equiv & \forall x\ \exists y\ [P(x) \lor Q(y)] \quad \text{[por página 8]} \\ \equiv_{sat} & \forall x\ [P(x) \lor Q(f(x))] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & \forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y) \\ \equiv & \exists y\ \forall x\ [P(x) \lor Q(y)] \quad \text{[por página 8]} \\ \equiv_{sat} & \forall x\ [P(x) \lor Q(a)] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{array}{ll} & \neg(\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)] \land \forall x\ [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow \forall x\ [P(x) \rightarrow R(x)]) \\ \equiv & \exists z\ \forall x\ \forall y\ [((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))] \quad \text{[p. 9]} \\ \equiv_{sat} & \forall x\ \forall y\ [((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(a) \land \neg R(a))] \end{array}$$

Tema 9: Formas normales de Skolem y cláusulas

Sintaxis de la lógica clausal de primer orden

- Un átomo es una fórmula atómica.
  Variables sobre átomos: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$.
- Un literal es un átomo (A) o la negación de un átomo ($\neg A$).
  Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$.
- Una cláusula es un conjunto finito de literales.
  Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$.
- La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.
  La cláusula vacía se representa por $\square$.
- Conjuntos finitos de cláusulas.
  Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$.

Semántica de la lógica clausal de primer orden

- Fórmulas correspondientes:
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\{L_1, \dots, L_n\}$ es
    $$\forall x_1 \ \dots \forall x_p \ [L_1 \vee \dots \vee L_n],$$
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $L_1 \vee \dots \vee L_n$.
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\square$ es $\bot$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas
    $$\{\{L^1_1, \dots, L^1_{n_1}\}, \dots, \{L^m_1, \dots, L^m_{n_m}\}\},$$
    cuyas variables libres son $x_1, \dots, x_p$, es
    $$\forall x_1 \ \dots \forall x_p \ [(L^1_1 \vee \dots \vee L^1_{n_1}) \wedge \dots \wedge (L^m_1 \vee \dots \vee L^m_{n_m})].$$
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\emptyset$ es $\top$.
- Semántica:
  - Def.: En cualquier interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$, $I(\top) = 1$ e $I(\bot) = 0$.
  - Def.: Los conceptos semánticos relativos a las cláusulas y a los conjuntos de cláusulas son los de sus correspondientes fórmulas.

Forma clausal de una fórmula

- Def.: Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas S tal que $F \equiv_{sat} S$.
- Algoritmo: Aplicando a la fórmula F los siguientes pasos se obtiene S que es una forma clausal de F:
  1. Sea $F_1 = \exists y_1 \ \dots \exists y_n \ F$, donde $y_1, \dots, y_n$ son las variables libres de F.
  2. Sea F_2 una forma normal prenexa conjuntiva rectificada de F_1 calculada mediante el algoritmo de la página 10.
  3. Sea $F_3 = \text{Sko}(F_2)$, que tiene la forma
     $\forall x_1 \ \dots \forall x_p \ [(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)]$,
  4. Sea $S = \{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$.
- Prop.: $F \equiv_{sat} F_1 \equiv F_2 \equiv_{sat} F_3 \equiv S$.

Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de
$$\begin{array}{ll} & \neg\exists x\,[P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)] \\ \equiv_{sat} & \forall x\,[P(x) \land \neg P(f(x))] \quad \text{[pág. 14]} \\ \equiv & \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\} \end{array}$$
- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de
$$\begin{array}{ll} & \forall x\, P(x) \lor \exists y\, Q(y) \\ \equiv_{sat} & \forall x\,[P(x) \lor Q(f(x))] \quad \text{[pág. 14]} \\ \equiv & \{\{P(x), Q(f(x))\}\} \end{array}$$
- Ejemplo de cálculo de otra forma clausal de
$$\begin{array}{ll} & \forall x\, P(x) \lor \exists y\, Q(y) \\ \equiv_{sat} & \forall x\,[P(x) \lor Q(a)] \quad \text{[pág. 14]} \\ \equiv & \{\{P(x), Q(a)\}\} \end{array}$$
- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de
$$\begin{array}{ll} & \neg(\forall x\,[P(x) \rightarrow Q(x)] \land \forall x\,[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow \forall x\,[P(x) \rightarrow R(x)]) \\ \equiv_{sat} & \forall x\, \forall y\,[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(a) \land \neg R(a))] \quad \text{[p 14]} \\ \equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\} \end{array}$$

Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\forall x\,[P(x) \to Q(x)] \land \exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)) & \\
\equiv & \neg(\forall x\,[P(x) \to Q(x)] \land \exists y\, P(y) \to \exists z\, Q(z)) & [(2)] \\
\equiv & \neg(\neg(\forall x\,[P(x) \to Q(x)] \land \exists y\, P(y)) \lor \exists z\, Q(z)) & [(4)] \\
\equiv & \neg(\neg(\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land \exists y\, P(y)) \lor \exists z\, Q(z)) & [(4)] \\
\equiv & \neg\neg(\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land \exists y\, P(y)) \land \neg\exists z\, Q(z) & [(6)] \\
\equiv & (\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land \exists y\, P(y)) \land \neg\exists z\, Q(z) & [(7)] \\
\equiv & (\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land \exists y\, P(y)) \land \forall z\, \neg Q(z) & [(9)] \\
\equiv & \exists y\,[\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land P(y)] \land \forall z\, \neg Q(z) & [(17)] \\
\equiv & \exists y\,[(\forall x\,[\neg P(x) \lor Q(x)] \land P(y)) \land \forall z\, \neg Q(z)] & [(13)] \\
\equiv & \exists y\,[\forall x\,[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y))] \land \forall z\, \neg Q(z) & [(11)] \\
\equiv & \exists y\,\forall x\,[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y)) \land \forall z\, \neg Q(z)] & [(11)] \\
\equiv & \exists y\,\forall x\,\forall z\,[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y) \land \neg Q(z)] & [(15)] \\
\equiv_{sat} & \forall x\,\forall z\,[(\neg P(x) \lor Q(x) \land P(a)) \land \neg Q(z)] & [(15)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\} &
\end{array}
$$

Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- Equisatisfacibilidad de conjuntos de fórmulas:
  - Def.: Los conjuntos de fórmulas S_1 y S_2 son equisatisfacibles si:
    S_1 es satisfacible syss S_2 es satisfacible.
    Se representa por $S_1 \equiv_{sat} S_2$.
- Forma clausal de un conjunto de fórmulas:
  - Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equisatisfacible con S.
  - Prop.: Si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
  - Ejemplo: Una forma clausal de
    $$\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x), \neg \exists x\ Q(x)\}$$
    es
    $$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}.$$

Reducción de consecuencia e inconsistencia de cláusulas

- Prop: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg G$. Son equivalentes:
  1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
  2. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente.
  3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
- Ejemplos:
  - Ejemplo 1:
    $\{\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x\ P(x)\} \models \exists x\ Q(x)$
    syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ es inconsistente.
  - Ejemplo 2:
    $\{\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x\ [Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models \forall x\ [P(x) \rightarrow R(x)]$
    syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsiste

Bibliografía

1. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 26–31.
2. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 35–39 y 46–51.
3. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 101–106.
4. S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004) pp. 62–67.
5. R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden.* (U. Politénica de Cataluña, 2003) pp. 16–17
6. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 37–49
7. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 43–47.
8. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 51–61.