

Ejercicios de deducción natural

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 26 de Abril de 2007 (versión de 20 de mayo de 2011)

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento–NoComercial–CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons.

Se permite:

- copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra
- hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:



Reconocimiento. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor.



No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.



Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Esto es un resumen del texto legal (la licencia completa). Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Índice general

| | |
|----------------------------------|----|
| 1. Ejercicios resueltos en clase | 4 |
| 2. Ejercicios propuestos | 19 |
| 3. Ejercicios de exámenes | 50 |

Capítulo 1

Ejercicios resueltos en clase

Ejercicio 1 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} P(c), \\ \forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)] \\ \vdash \neg Q(c) \end{array}$$

Solución:

- | | | |
|---|---|---------------------|
| 1 | $P(c)$ | Premisa |
| 2 | $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$ | Premisa |
| 3 | $P(c) \rightarrow Q(c)$ | $E\forall$ 2 |
| 4 | $Q(c)$ | $E\rightarrow$ 3, 1 |

Ejercicio 2 *Demostrar mediante deducción natural* $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)],$ $\forall xP(x)$ $\vdash \forall x\neg Q(x)$

Solución:

| | | |
|---|---|----------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\forall xP(x)$ | Premisa |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $P(x_0) \rightarrow \neg Q(x_0)$ | E \forall 1, 3 |
| 5 | $P(x_0)$ | E \forall 2, 3 |
| 6 | $Q(x_0)$ | E \rightarrow 4, 5 |
| 7 | $\forall x\neg Q(x)$ | I \forall 3 – 6 |

Ejercicio 3 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall xP(x)$$

$$\vdash \exists xP(x)$$

Solución:

- 1 $\forall xP(x)$ Premisa
- 2 $P(x_0)$ $E\forall$ 1
- 3 $\exists xP(x)$ $I\exists$ 2

Ejercicio 4 *Demostrar mediante deducción natural* $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)],$ $\exists xP(x)$ $\vdash \exists xQ(x)$

Solución:

| | | |
|---|------------------------------------|----------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\exists xP(x)$ | Premisa |
| 3 | parámetro $x_0, P(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ | E \forall 1, 3 |
| 5 | $Q(x_0)$ | E \rightarrow 4, 3 |
| 6 | $\exists xQ(x)$ | I \exists 5 |
| 7 | $\exists xQ(x)$ | E \exists 2, 3 – 6 |

Ejercicio 5 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{aligned} & \forall x[Q(x) \rightarrow R(x)], \\ & \exists x[P(x) \wedge Q(x)] \\ & \vdash \exists x[P(x) \wedge R(x)] \end{aligned}$$

Solución:

| | | |
|----|---------------------------------------|---------------------|
| 1 | $\forall x[Q(x) \rightarrow R(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ | Premisa |
| 3 | parámetro $x_0, P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 5 | $Q(x_0) \rightarrow R(x_0)$ | $E \forall 1$ |
| 6 | $Q(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 7 | $R(x_0)$ | $E \rightarrow 5,6$ |
| 8 | $P(x_0) \wedge R(x_0)$ | $I \wedge 4,7$ |
| 9 | $\exists x[P(x) \wedge R(x)]$ | $I \exists 8$ |
| 10 | $\exists x[P(x) \wedge R(x)]$ | $E \exists 2,3 - 9$ |

Ejercicio 6 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \exists xP(x), \\ \forall x\forall y[P(x) \rightarrow Q(y)] \\ \vdash \forall yQ(y) \end{array}$$

Solución:

| | | |
|---|---|----------------------|
| 1 | $\exists xP(x)$ | Premisa |
| 2 | $\forall x\forall y[P(x) \rightarrow Q(y)]$ | Premisa |
| 3 | parámetro y_0 | Supuesto |
| 4 | parámetro $x_1, P(x_1)$ | Supuesto |
| 5 | $\forall y[P(x_1) \rightarrow Q(y)]$ | E \forall 2, 4 |
| 6 | $P(x_1) \rightarrow Q(y_0)$ | E \forall 5, 3 |
| 7 | $Q(y_0)$ | E \rightarrow 6, 4 |
| 8 | $Q(y_0)$ | E \exists 1, 4 – 7 |
| 9 | $\forall yQ(y)$ | I \forall 3 – 8 |

Ejercicio 7 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\vdash \neg\forall xP(x) \leftrightarrow \exists x\neg P(x)$$

Solución:

En primer lugar, se prueba el Lema 1: $\neg\forall xP(x) \vdash \exists x\neg P(x)$

| | | |
|----|--------------------------|-------------------|
| 1 | $\neg\forall xP(x)$ | Premisa |
| 2 | $\neg\exists x\neg P(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $\neg P(x_0)$ | Supuesto |
| 5 | $\exists x\neg P(x)$ | I \exists 4, 3 |
| 6 | \perp | E \neg 2, 5 |
| 7 | $P(x_0)$ | RAA 4 – 6 |
| 8 | $\forall xP(x)$ | I \forall 3 – 7 |
| 9 | \perp | E \neg 1, 8 |
| 10 | $\exists x\neg P(x)$ | RAA 2 – 9 |

En segundo lugar, se prueba el Lema 2: $\exists x\neg P(x) \vdash \neg\forall xP(x)$

| | | |
|---|------------------------------|----------------------|
| 1 | $\exists x\neg P(x)$ | Premisa |
| 2 | $\neg\neg\forall xP(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $x_0, \neg P(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $\forall xP(x)$ | E $\neg\neg$ 2 |
| 5 | $P(x_0)$ | E \forall 4 |
| 6 | \perp | E \neg 3, 5 |
| 7 | \perp | E \exists 1, 3 – 6 |
| 8 | $\neg\forall xP(x)$ | RAA 2 – 7 |

Finalmente se demuestra el ejercicio

| | | |
|---|--|----------------------------|
| 1 | $\neg\forall xP(x)$ | Supuesto |
| 2 | $\exists x\neg P(x)$ | Lema 1 |
| 3 | $\neg\forall xP(x) \rightarrow \exists x\neg P(x)$ | $\mid \rightarrow 1 - 2$ |
| 4 | $\exists x\neg P(x)$ | Supuesto |
| 5 | $\neg\forall xP(x)$ | Lema 2 |
| 6 | $\exists x\neg P(x) \rightarrow \neg\forall xP(x)$ | $\mid \rightarrow 4 - 5$ |
| 7 | $\neg\forall xP(x) \leftrightarrow \exists x\neg P(x)$ | $\mid \leftrightarrow 3,6$ |

Ejercicio 8 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\vdash \forall x[P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$$

Solución:

En primer lugar se demuestra el Lema 3:

$$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \vdash \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$$

| | | |
|----|--------------------------------------|-------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 3 | $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | $E \forall 1, 2$ |
| 4 | $P(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 5 | $\forall xP(x)$ | $I \forall 2 - 4$ |
| 6 | parámetro x_1 | Supuesto |
| 7 | $P(x_1) \wedge Q(x_1)$ | $E \forall 1, 6$ |
| 8 | $Q(x_1)$ | $E \wedge 7$ |
| 9 | $\forall xQ(x)$ | $I \forall 6 - 8$ |
| 10 | $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ | $I \wedge 5, 9$ |

En segundo lugar se demuestra el Lema 4:

$$\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \vdash \forall x[P(x) \wedge Q(x)].$$

| | | |
|---|--------------------------------------|-------------------|
| 1 | $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ | Premisa |
| 2 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 3 | $\forall xP(x)$ | $E \wedge 1$ |
| 4 | $P(x_0)$ | $E \forall 3, 2$ |
| 5 | $\forall xQ(x)$ | $E \wedge 1$ |
| 6 | $Q(x_0)$ | $E \wedge 5$ |
| 7 | $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | $I \wedge 4, 6$ |
| 8 | $\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$ | $I \forall 2 - 7$ |

Finalmente se demuestra el ejercicio

| | | |
|---|--|--------------------------|
| 1 | $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ | Supuesto |
| 2 | $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ | Lema 3 |
| 3 | $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ | $I \rightarrow 1 - 2$ |
| 4 | $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ | Supuesto |
| 5 | $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ | Lema 4 |
| 6 | $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ | $I \rightarrow 4 - 5$ |
| 7 | $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ | $I \leftrightarrow 3, 6$ |

Ejercicio 9 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\vdash \exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \leftrightarrow \exists x[P(x) \vee Q(x)]$$

Solución:

En primer lugar se demuestra el Lema 5:

$$\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \vdash \exists x[P(x) \vee Q(x)]$$

| | | |
|----|------------------------------------|---------------------------|
| 1 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | Premisa |
| 2 | $\exists xP(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $x_0, P(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $P(x_0) \vee Q(x_0)$ | $I \vee 3$ |
| 5 | $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ | $I \exists 4, 3$ |
| 6 | $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ | $E \exists 2, 3 - 5$ |
| 7 | $\exists xQ(x)$ | Supuesto |
| 8 | parámetro $x_1, Q(x_1)$ | Supuesto |
| 9 | $P(x_1) \vee Q(x_1)$ | $I \vee 8$ |
| 10 | $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ | $I \exists 9, 8$ |
| 11 | $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ | $E \exists 7, 8 - 10$ |
| 12 | $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ | $\vee E 1, 2 - 6, 7 - 11$ |

En segundo lugar se demuestra el Lema 6:

$$\exists x[P(x) \vee Q(x)] \vdash \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$$

| | | |
|----|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | parámetro $x_0, P(x_0) \vee Q(x_0)$ | Supuesto |
| 3 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $\exists xP(x)$ | $I \exists 3, 2$ |
| 5 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $I \vee 4$ |
| 6 | $Q(x_0)$ | Supuesto |
| 7 | $\exists xQ(x)$ | $I \exists 6, 2$ |
| 8 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $I \vee 7$ |
| 9 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $E \vee 2, 3 - 5, 6 - 8$ |
| 10 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $E \exists 1, 2 - 9$ |

Finalmente se demuestra el ejercicio

| | | |
|---|--|--------------------------|
| 1 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | Supuesto |
| 2 | $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ | Lema 5 |
| 3 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \rightarrow \exists x[P(x) \vee Q(x)]$ | $I \rightarrow 1 - 2$ |
| 4 | $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ | Supuesto |
| 5 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | Lema 6 |
| 6 | $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ | $I \rightarrow 4 - 5$ |
| 7 | $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \leftrightarrow \exists x[P(x) \vee Q(x)]$ | $I \leftrightarrow 3, 6$ |

Ejercicio 10 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\vdash \exists x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$$

Solución:

En primer lugar se demuestra el Lema 7:

$$\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$$

| | | |
|---|--------------------------------------|----------------------|
| 1 | $\exists x \exists y P(x, y)$ | Premisa |
| 2 | parámetro $x_0, \exists y P(x_0, y)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $y_0, P(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 4 | $\exists x P(x, y_0)$ | I \exists 3, 2 |
| 5 | $\exists y \exists x P(x, y)$ | I \exists 4, 3 |
| 6 | $\exists y \exists x P(x, y)$ | E \exists 2, 3 – 5 |
| 7 | $\exists y \exists x P(x, y)$ | E \exists 1, 2 – 6 |

En segundo lugar se demuestra el Lema 8:

$$\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$$

| | | |
|---|--------------------------------------|----------------------|
| 1 | $\exists x \exists y P(x, y)$ | Premisa |
| 2 | parámetro $x_0, \exists y P(x_0, y)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $y_0, P(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 4 | $\exists x P(x, y_0)$ | I \exists 3, 2 |
| 5 | $\exists y \exists x P(x, y)$ | I \exists 4, 3 |
| 6 | $\exists y \exists x P(x, y)$ | E \exists 2, 3 – 5 |
| 7 | $\exists y \exists x P(x, y)$ | E \exists 1, 2 – 6 |

Finalmente se demuestra el ejercicio

| | | |
|---|---|--------------------------|
| 1 | $\exists x \exists y P(x, y)$ | Supuesto |
| 2 | $\exists y \exists x P(x, y)$ | Lema 7 |
| 3 | $\exists x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \exists x P(x, y)$ | $I \rightarrow 1 - 2$ |
| 4 | $\exists y \exists x P(x, y)$ | Supuesto |
| 5 | $\exists x \exists y P(x, y)$ | Lema 8 |
| 6 | $\exists y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$ | $I \rightarrow 4 - 5$ |
| 7 | $\exists x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$ | $I \leftrightarrow 3, 6$ |

Capítulo 2

Ejercicios propuestos

Ejercicio 11 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$$
$$\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$$

Solución:

| | | |
|---|---|---------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\forall xP(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ | E \forall 1,3 |
| 5 | $P(x_0)$ | E \forall 2,3 |
| 6 | $Q(x_0)$ | E \rightarrow 4,5 |
| 7 | $\forall xQ(x)$ | I \forall 3 – 6 |
| 8 | $\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$ | I \wedge 2 – 7 |

Ejercicio 12 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \exists x \neg P(x) \\ \vdash \neg \forall x P(x) \end{array}$$

Solución:

| | | |
|---|------------------------------|----------------------|
| 1 | $\exists x \neg P(x)$ | Premisa |
| 2 | $\forall x P(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $x_0, \neg P(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | $E \forall 2, 3$ |
| 5 | \perp | $E \neg 3, 2, 4$ |
| 6 | \perp | $E \exists 1, 3 - 5$ |
| 7 | $\neg \forall x P(x)$ | $I \neg 2 - 6$ |

Ejercicio 13 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \forall xP(x) \\ \vdash \forall yP(y) \end{array}$$

Solución:

| | | |
|---|-----------------|-------------------|
| 1 | $\forall xP(x)$ | Premisa |
| 2 | parámetro y_0 | Supuesto |
| 3 | $P(y_0)$ | E \forall 1,2 |
| 4 | $\forall yP(y)$ | I \forall 2 – 3 |

Ejercicio 14 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$$

$$\vdash \forall x\neg Q(x) \rightarrow \forall x\neg P(x)$$

Solución:

| | | |
|---|---|--------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\forall x\neg Q(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ | $E\forall 1,3$ |
| 5 | $\neg Q(x_0)$ | $E\forall 2,3$ |
| 6 | $\neg P(x_0)$ | MT 4,5 |
| 7 | $\forall x\neg P(x)$ | $I\forall 3-6$ |
| 8 | $\forall x\neg Q(x) \rightarrow \forall x\neg P(x)$ | $E\rightarrow 2-7$ |

Ejercicio 15 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$$

$$\vdash \neg \exists x[P(x) \wedge Q(x)]$$

Solución:

| | | |
|----|---|----------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $x_0, P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $Q(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 5 | $P(x_0) \rightarrow \neg Q(x_0)$ | $E \forall 1, 3$ |
| 6 | $P(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 7 | $\neg Q(x_0)$ | $E \rightarrow 5, 6$ |
| 8 | \perp | $E \neg 7, 4$ |
| 9 | \perp | $E \exists 2, 3 - 8$ |
| 10 | $\neg \exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ | $I \neg 2 - 9$ |

Ejercicio 16 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x \forall y P(x, y)$$

$$\vdash (\forall u)(\forall v)P(u, v)$$

Solución:

| | | |
|---|---------------------------------|-------------------|
| 1 | $\forall x \forall y P(x, y)$ | Premisa |
| 2 | parámetro u_0 | Supuesto |
| 3 | parámetro v_0 | Supuesto |
| 4 | $\forall y P(u_0, y)$ | E \forall 1, 2 |
| 5 | $P(u_0, v_0)$ | E \forall 4, 3 |
| 6 | $(\forall v)P(u_0, v)$ | I \forall 3 – 5 |
| 7 | $(\forall u)(\forall v)P(u, v)$ | I \forall 2 – 6 |

Ejercicio 17 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\exists x \exists y P(x, y)$$

$$\vdash (\exists u)(\exists v)P(u, v)$$

Solución:

| | | |
|---|--------------------------------------|----------------------|
| 1 | $\exists x \exists y P(x, y)$ | Premisa |
| 2 | parámetro $x_0, \exists y P(x_0, y)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $y_0, P(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 4 | $(\exists v)P(x_0, v)$ | I \exists 3, 3 |
| 5 | $(\exists u)(\exists v)P(u, v)$ | I \exists 4, 2 |
| 6 | $(\exists u)(\exists v)P(u, v)$ | E \exists 2, 3 – 5 |
| 7 | $(\exists u)(\exists v)P(u, v)$ | E \exists 1, 2 – 6 |

Ejercicio 18 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\exists x \forall y P(x, y)$$

$$\vdash \forall y \exists x P(x, y)$$

Solución:

| | | |
|---|--------------------------------------|----------------------|
| 1 | $\exists x \forall y P(x, y)$ | Premisa |
| 2 | parámetro $x_0, \forall y P(x_0, y)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro y_0 | Supuesto |
| 4 | $P(x_0, y_0)$ | $E \forall 2, 3$ |
| 5 | $\exists x P(x, y_0)$ | $I \exists 4, 2$ |
| 6 | $\forall y \exists x P(x, y)$ | $I \forall 3 - 5$ |
| 7 | $\forall y \exists x P(x, y)$ | $E \exists 1, 2 - 6$ |

Ejercicio 19 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \exists x[P(a) \rightarrow Q(x)] \\ \vdash P(a) \rightarrow \exists xQ(x) \end{array}$$

Solución:

| | | |
|---|--|-----------------------|
| 1 | $\exists x[P(a) \rightarrow Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | $P(a)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $x_0, P(a) \rightarrow Q(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $Q(x_0)$ | $E \rightarrow 3, 2$ |
| 5 | $\exists xQ(x)$ | $I \exists 4, 3$ |
| 6 | $\exists xQ(x)$ | $E \exists 1, 3 - 5$ |
| 7 | $P(a) \rightarrow \exists xQ(x)$ | $I \rightarrow 2 - 6$ |

Ejercicio 20 *Demostrar mediante deducción natural*

$$P(a) \rightarrow \exists xQ(x),$$

$$\vdash \exists x[P(a) \rightarrow Q(x)]$$

Solución:

| | | |
|----|------------------------------------|-----------------------------|
| 1 | $P(a) \rightarrow \exists xQ(x)$ | Premisa |
| 2 | parámetro x_0 | Premisa |
| 3 | $P(a) \vee \neg P(a)$ | LEM |
| 4 | $P(a)$ | Supuesto |
| 5 | $\exists xQ(x)$ | $E \rightarrow 1, 4$ |
| 6 | parámetro $x_1, Q(x_1)$ | Supuesto |
| 7 | $P(a)$ | Supuesto |
| 8 | $Q(x_1)$ | Hipótesis 6 |
| 9 | $P(a) \rightarrow Q(x_1)$ | $I \rightarrow 7 - 8$ |
| 10 | $\exists x[P(a) \rightarrow Q(x)]$ | $I \exists 9, 6$ |
| 11 | $\exists x[P(a) \rightarrow Q(x)]$ | $E \exists 15, 2$ |
| 12 | $\neg P(a)$ | Supuesto |
| 13 | $P(a)$ | Supuesto |
| 14 | \perp | $E \neg 12, 13$ |
| 15 | $Q(x_0)$ | $E \perp 14$ |
| 16 | $P(a) \rightarrow Q(x_0)$ | $I \rightarrow 13 - 15$ |
| 17 | $\exists x[P(a) \rightarrow Q(x)]$ | $I \exists 16, 2$ |
| 18 | $\exists x[P(a) \rightarrow Q(x)]$ | $E \vee 3, 4 - 11, 12 - 17$ |

Ejercicio 21 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \exists xP(x) \rightarrow Q(a) \\ \vdash \forall x[P(x) \rightarrow Q(a)] \end{array}$$

Solución:

| | | |
|---|------------------------------------|-----------------------|
| 1 | $\exists xP(x) \rightarrow Q(a)$ | Premisa |
| 2 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 3 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $\exists xP(x)$ | \exists I 3,2 |
| 5 | $Q(a)$ | \rightarrow E 1,4 |
| 6 | $P(x_0) \rightarrow Q(a)$ | \rightarrow I 3 – 5 |
| 7 | $\forall x[P(x) \rightarrow Q(a)]$ | \forall I 2 – 6 |

Ejercicio 22 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x[P(x) \rightarrow Q(a)],$$

$$\vdash \exists x[P(x) \rightarrow Q(a)]$$

Solución:

- 1 $\forall x[P(x) \rightarrow Q(a)]$ Premisa
- 2 parámetro x_0 Premisa
- 3 $P(x_0) \rightarrow Q(a)$ E \forall 1,2
- 4 $\exists x[P(x) \rightarrow Q(a)]$ I \exists 3,2

Ejercicio 23 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \\ \vdash \forall x[P(x) \vee Q(x)] \end{array}$$

Solución:

| | | |
|----|------------------------------------|-------------------------|
| 1 | $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ | Premisa |
| 2 | $\forall xP(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | E \forall 2,3 |
| 5 | $P(x_0) \vee Q(x_0)$ | I \vee 4 |
| 6 | $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ | I \forall 3 – 5 |
| 7 | $\forall xQ(x)$ | Supuesto |
| 8 | parámetro x_1 | Supuesto |
| 9 | $Q(x_1)$ | E \forall 7,8 |
| 10 | $P(x_1) \vee Q(x_1)$ | I \vee 9 |
| 11 | $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ | I \forall 8 – 10 |
| 12 | $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ | E \vee 1,2 – 6,7 – 11 |

Ejercicio 24 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$$

$$\vdash \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$$

Solución:

| | | |
|---|--|----------------------|
| 1 | $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | parámetro x_0 , $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | Supuesto |
| 3 | $P(x_0)$ | $E \wedge 2$ |
| 4 | $\exists xP(x)$ | $I \exists 3, 2$ |
| 5 | $Q(x_0)$ | $E \wedge 2$ |
| 6 | $\exists xQ(x)$ | $I \exists 5, 2$ |
| 7 | $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ | $I \wedge 4, 6$ |
| 8 | $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ | $E \exists 1, 2 - 7$ |

Ejercicio 25 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x \forall y [P(y) \rightarrow Q(x)]$$

$$\vdash \exists y P(y) \rightarrow \forall x Q(x)$$

Solución:

| | | |
|----|---|-----------------------|
| 1 | $\forall x \forall y [P(y) \rightarrow Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\exists y P(y)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | parámetro $y_0, P(y_0)$ | Supuesto |
| 5 | $\forall y [P(y) \rightarrow Q(x_0)]$ | E \forall 1,3 |
| 6 | $P(y_0) \rightarrow Q(x_0)$ | E \forall 5,4 |
| 7 | $Q(x_0)$ | E \rightarrow 6,4 |
| 8 | $Q(x_0)$ | E \exists 2,4 – 9 |
| 9 | $\forall x Q(x)$ | I \forall 3 – 8 |
| 10 | $\exists y P(y) \rightarrow \forall x Q(x)$ | I \rightarrow 2 – 9 |

Ejercicio 26 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\neg \forall x \neg P(x),$$

$$\vdash \exists x P(x)$$

Solución:

| | | |
|----|----------------------------|-------------------|
| 1 | $\neg \forall x \neg P(x)$ | Premisa |
| 2 | parámetro x_0 | Premisa |
| 3 | $\neg \exists x P(x)$ | Supuesto |
| 4 | parámetro x_1 | Supuesto |
| 5 | $P(x_1)$ | Supuesto |
| 6 | $\exists x P(x)$ | I \exists 5, 4 |
| 7 | \perp | E \neg 3, 6 |
| 8 | $\neg P(x_1)$ | I \neg 5 – 7 |
| 9 | $\forall x \neg P(x)$ | I \forall 4 – 8 |
| 10 | \perp | E \neg 1, 9 |
| 11 | $\exists x P(x)$ | RAA 3 – 10 |

Ejercicio 27 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x \neg P(x)$$

$$\vdash \neg \exists x P(x)$$

Solución:

| | | |
|---|-------------------------|------------------|
| 1 | $\forall x \neg P(x)$ | Premisa |
| 2 | $\exists x P(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $x_0, P(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $\neg P(x_0)$ | $E\forall 1,3$ |
| 5 | \perp | $E\neg 4,3$ |
| 6 | \perp | $E\exists 2,3-5$ |
| 7 | $\neg \exists x P(x)$ | $I\neg 2-6$ |

Ejercicio 28 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \exists xP(x) \\ \vdash \neg\forall x\neg P(x) \end{array}$$

Solución:

| | | |
|---|--------------------------|------------------|
| 1 | $\exists xP(x)$ | Premisa |
| 2 | $\forall x\neg P(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $x_0, P(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $\neg P(x_0)$ | $E\forall 1,3$ |
| 5 | \perp | $E\neg 4,3$ |
| 6 | \perp | $E\exists 1,3-5$ |
| 7 | $\neg\forall x\neg P(x)$ | $I\neg 2-6$ |

Ejercicio 29 *Demostrar mediante deducción natural*

$$P(a) \rightarrow \forall xQ(x)$$

$$\vdash \forall x[P(a) \rightarrow Q(x)]$$

Solución:

| | | |
|---|------------------------------------|-----------------------|
| 1 | $P(a) \rightarrow \forall xQ(x)$ | Premisa |
| 2 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 3 | $P(a)$ | Supuesto |
| 4 | $\forall xQ(x)$ | $E \rightarrow 1,3$ |
| 5 | $Q(x_0)$ | $E \forall 4,2$ |
| 6 | $P(a) \rightarrow Q(x_0)$ | $I \rightarrow 3 - 5$ |
| 7 | $\forall x[P(a) \rightarrow Q(x)]$ | $I \forall 2 - 6$ |

Ejercicio 30 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x \forall y \forall z [R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)],$$

$$\forall x \neg R(x, x)$$

$$\vdash \forall x \forall y [R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)]$$

Solución:

| | | |
|----|--|------------------------|
| 1 | $\forall x \forall y \forall z [R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)]$ | Premisa |
| 2 | $\forall x \neg R(x, x)$ | Premisa |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | parámetro y_0 | Supuesto |
| 5 | $R(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 6 | $R(y_0, x_0)$ | Supuesto |
| 7 | $\neg R(x_0, x_0)$ | E \forall 2, 3 |
| 8 | $\forall y \forall z [R(x_0, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x_0, z)]$ | E \forall 1, 3 |
| 9 | $\forall z [R(x_0, y_0) \wedge R(y_0, z) \rightarrow R(x_0, z)]$ | E \forall 8, 4 |
| 10 | $R(x_0, y_0) \wedge R(y_0, x_0) \rightarrow R(x_0, x_0)$ | E \forall 9, 3 |
| 11 | $R(x_0, y_0) \wedge R(y_0, x_0)$ | I \wedge 5, 6 |
| 12 | $R(x_0, x_0)$ | E \rightarrow 10, 11 |
| 13 | \perp | E \neg 7, 12 |
| 14 | $\neg R(y_0, x_0)$ | I \neg 6 – 13 |
| 15 | $R(x_0, y_0) \rightarrow \neg R(y_0, x_0)$ | I \rightarrow 5 – 14 |
| 16 | $\forall y [R(x_0, y) \rightarrow \neg R(y, x_0)]$ | I \forall 4 – 15 |
| 17 | $\forall x \forall y [R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)]$ | I \forall 3 – 16 |

Ejercicio 31 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{aligned} & \forall x[P(x) \vee Q(x)], \\ & \exists x\neg Q(x), \\ & \forall x[R(x) \rightarrow \neg P(x)] \\ & \vdash \exists x\neg R(x) \end{aligned}$$

Solución:

| | | |
|----|---|--------------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x\neg Q(x)$ | Premisa |
| 3 | $\forall x[R(x) \rightarrow \neg P(x)]$ | Premisa |
| 4 | parámetro $x_0, \neg Q(x_0)$ | Supuesto |
| 5 | $P(x_0) \vee Q(x_0)$ | $E\forall$ 1,4 |
| 6 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 7 | $R(x_0) \rightarrow \neg P(x_0)$ | $E\forall$ 3,4 |
| 8 | $\neg\neg P(x_0)$ | $I\neg$ 6 |
| 9 | $\neg R(x_0)$ | MT 7,8 |
| 10 | $\exists x\neg R(x)$ | $I\exists$ 9,4 |
| 11 | $Q(x_0)$ | Supuesto |
| 12 | \perp | $E\neg$ 4,11 |
| 13 | $\exists x\neg R(x)$ | $E\perp$ 12 |
| 14 | $\exists x\neg R(x)$ | $E\vee$ 5,6 – 10,11 – 13 |
| 15 | $\exists x\neg R(x)$ | $E\exists$ 2,4 – 14 |

Ejercicio 32 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x[P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))],$$

$$\neg \exists x[P(x) \wedge R(x)]$$

$$\vdash \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$$

Solución:

| | | |
|----|--|---------------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))]$ | Premisa |
| 2 | $\neg \exists x[P(x) \wedge R(x)]$ | Premisa |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 5 | $P(x_0) \rightarrow (Q(x_0) \vee R(x_0))$ | E \forall 1, 3 |
| 6 | $Q(x_0) \vee R(x_0)$ | E \rightarrow 5, 4 |
| 7 | $Q(x_0)$ | Supuesto |
| 8 | $R(x_0)$ | Supuesto |
| 9 | $P(x_0) \wedge R(x_0)$ | I \wedge 4, 8 |
| 10 | $\exists x[P(x) \wedge R(x)]$ | I \exists 9, 3 |
| 11 | \perp | E \neg 2, 10 |
| 12 | $Q(x_0)$ | E \perp 11 |
| 13 | $Q(x_0)$ | E \vee 6, 7 – 7, 8 – 12 |
| 14 | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ | I \rightarrow 4 – 13 |
| 15 | $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ | I \forall 3 – 14 |

Ejercicio 33 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\exists x \exists y [R(x, y) \vee R(y, x)]$$

$$\vdash \exists x \exists y R(x, y)$$

Solución:

| | | |
|----|---|--------------------------|
| 1 | $\exists x \exists y [R(x, y) \vee R(y, x)]$ | Premisa |
| 2 | parámetro $x_0, \exists y [R(x_0, y) \vee R(y, x_0)]$ | Supuesto |
| 3 | parámetro $y_0, R(x_0, y_0) \vee R(y_0, x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $R(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 5 | $\exists y R(x, y_0)$ | I \exists 4, 3 |
| 6 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | I \exists 5, 2 |
| 7 | $R(y_0, x_0)$ | Supuesto |
| 8 | $\exists y R(y_0, y)$ | I \exists 7, 2 |
| 9 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | I \exists 8, 3 |
| 10 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | E \vee 3, 4 – 6, 7 – 9 |
| 11 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | E \exists 2, 3 – 10 |
| 12 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | E \exists 1, 2 – 11 |

Ejercicio 34 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} t_1 = t_2, \\ t_2 = t_3 \\ \vdash t_1 = t_3 \end{array}$$

Solución:

- 1 $t_1 = t_2$ Premisa
- 2 $t_2 = t_3$ Premisa
- 3 $t_1 = t_3$ E = 2,1

Ejercicio 35 *Demostrar mediante deducción natural*

$$t_1 = t_2$$

$$\vdash t_2 = t_1$$

Solución:

- 1 $t_1 = t_2$ Premisa
- 2 $t_1 = t_1$ I =
- 3 $t_2 = t_1$ E = 1,2

Ejercicio 36 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} P(a) \\ \vdash \forall x(x = a \rightarrow P(x)) \end{array}$$

Solución:

| | | |
|---|-------------------------------------|-----------------------|
| 1 | $P(a)$ | Premisa |
| 2 | x_0 | Supuesto |
| 3 | $x_0 = a$ | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | E = 3, 1 |
| 5 | $x_0 = a \rightarrow P(x_0)$ | I \rightarrow 3 – 4 |
| 6 | $\forall x(x = a \rightarrow P(x))$ | I \forall 2 – 5 |

Ejercicio 37 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\exists x \exists y (R(x, y) \vee R(y, x))$$

$$\neg \exists x R(x, x)$$

$$\vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$$

Solución:

| | | |
|----|--|----------------------------|
| 1 | $\exists x \exists y (R(x, y) \vee R(y, x))$ | Premisa |
| 2 | $\neg \exists x R(x, x)$ | Premisa |
| 3 | parámetro x_0 , $\exists y (R(x_0, y) \vee R(y, x_0))$ | Supuesto |
| 4 | parámetro y_0 , $R(x_0, y_0) \vee R(y_0, x_0)$ | Supuesto |
| 5 | $x_0 = y_0$ | Supuesto |
| 6 | $R(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 7 | $R(y_0, y_0)$ | I= 5, 6 |
| 8 | $\exists x R(x, x)$ | I \exists 7, 4 |
| 9 | \perp | E \neg 2, 8 |
| 10 | $R(y_0, x_0)$ | Supuesto |
| 11 | $R(y_0, y_0)$ | I= 5, 10 |
| 12 | $\exists x R(x, x)$ | I \exists 11, 4 |
| 13 | \perp | E \neg 2, 12 |
| 14 | \perp | E \vee 4, 6 – 9, 10 – 13 |
| 15 | $\neg(x_0 = y_0)$ | I \neg 5 – 14 |
| 16 | $\exists y \neg(x_0 = y)$ | I \exists 15, 4 |
| 17 | $\exists x \exists y \neg(x = y)$ | I \exists 16, 3 |
| 18 | $\exists x \exists y \neg(x = y)$ | E \exists 3, 4 – 17 |
| 19 | $\exists x \exists y \neg(x = y)$ | E \exists 1, 3 – 18 |

Ejercicio 38 *Demostrar mediante deducción natural*
$$\begin{aligned} & \forall x P(a, x, x), \\ & \forall x \forall y \forall z (P(x, y, z) \rightarrow P(f(x), y, f(z))) \\ & \vdash P(f(a), a, f(a)) \end{aligned}$$

Solución:

| | | |
|---|---|----------------------|
| 1 | $\forall x P(a, x, x)$ | Premisa |
| 2 | $\forall x \forall y \forall z (P(x, y, z) \rightarrow P(f(x), y, f(z)))$ | Premisa |
| 3 | $\forall x P(a, a, a)$ | E \forall 1 |
| 4 | $\forall y \forall z (P(a, y, z) \rightarrow P(f(a), y, f(z)))$ | E \forall 2 |
| 5 | $\forall z (P(a, a, z) \rightarrow P(f(a), a, f(z)))$ | E \forall 4 |
| 6 | $P(a, a, a) \rightarrow P(f(a), a, f(a))$ | E \forall 5 |
| 7 | $P(f(a), a, f(a))$ | E \rightarrow 6, 3 |

Ejercicio 39 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{aligned} & \forall x P(a, x, x), \\ & \forall x \forall y \forall z (P(x, y, z) \rightarrow P(f(x), y, f(z))) \\ & \vdash \exists z P(f(a), z, f(f(a))) \end{aligned}$$

Solución:

| | | |
|---|---|----------------------|
| 1 | $\forall x P(a, x, x)$ | Premisa |
| 2 | $\forall x \forall y \forall z (P(x, y, z) \rightarrow P(f(x), y, f(z)))$ | Premisa |
| 3 | $P(a, f(a), f(a))$ | $E \forall 1$ |
| 4 | $\forall y \forall z (P(a, y, z) \rightarrow P(f(a), y, f(z)))$ | $E \forall 2$ |
| 5 | $\forall z (P(a, f(a), z) \rightarrow P(f(a), f(a), f(z)))$ | $E \forall 4$ |
| 6 | $P(a, f(a), f(a)) \rightarrow P(f(a), f(a), f(f(a)))$ | $E \forall 5$ |
| 7 | $P(f(a), f(a), f(f(a)))$ | $E \rightarrow 6, 3$ |
| 8 | $\exists z P(f(a), z, f(f(a)))$ | $I \exists 7$ |

Ejercicio 40 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \forall y Q(a, y), \\ \forall x \forall y (Q(x, y) \rightarrow Q(s(x), s(y))) \\ \vdash \exists z (Q(a, z) \wedge Q(z, s(s(a)))) \end{array}$$

Solución:

| | | |
|---|---|----------------------|
| 1 | $\forall y Q(a, y)$ | Premisa |
| 2 | $\forall x \forall y (Q(x, y) \rightarrow Q(s(x), s(y)))$ | Premisa |
| 3 | $Q(a, s(a))$ | $E \forall 1$ |
| 4 | $\forall y (Q(a, y) \rightarrow Q(s(a), s(y)))$ | $E \forall 2$ |
| 5 | $Q(a, s(a)) \rightarrow Q(s(a), s(s(a)))$ | $E \forall 4$ |
| 6 | $Q(s(a), s(s(a)))$ | $E \rightarrow 5, 3$ |
| 7 | $Q(a, s(a)) \wedge Q(s(a), s(s(a)))$ | $I \wedge 3, 6$ |
| 8 | $\exists z (Q(a, z) \wedge Q(z, s(s(a))))$ | $I \exists 7$ |

Capítulo 3

Ejercicios de exámenes

Ejercicio 41 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \\ \vdash \forall x[P(x) \vee Q(x)] \end{array}$$

Solución:

| | | |
|----|------------------------------------|-------------------------|
| 1 | $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ | Premisa |
| 2 | $\forall xP(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | E \forall 2,3 |
| 5 | $P(x_0) \vee Q(x_0)$ | I \vee 4 |
| 6 | $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ | I \forall 3 – 5 |
| 7 | $\forall xQ(x)$ | Supuesto |
| 8 | parámetro x_1 | Supuesto |
| 9 | $Q(x_1)$ | E \forall 7,8 |
| 10 | $P(x_1) \vee Q(x_1)$ | I \vee 9 |
| 11 | $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ | I \forall 8 – 10 |
| 12 | $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ | E \vee 1,2 – 6,7 – 11 |

Ejercicio 42 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$$

$$\vdash \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$$

Solución:

| | | |
|---|--|----------------------|
| 1 | $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | parámetro x_0 , $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | Supuesto |
| 3 | $P(x_0)$ | $E \wedge 2$ |
| 4 | $\exists xP(x)$ | $I \exists 3, 2$ |
| 5 | $Q(x_0)$ | $E \wedge 2$ |
| 6 | $\exists xQ(x)$ | $I \exists 5, 2$ |
| 7 | $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ | $I \wedge 4, 6$ |
| 8 | $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ | $E \exists 1, 2 - 7$ |

Ejercicio 43 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{aligned} & \forall x[R(x) \rightarrow Q(x)], \\ & \exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)] \\ & \vdash \exists x[P(x) \wedge \neg R(x)] \end{aligned}$$

Solución:

| | | |
|----|--|----------------------|
| 1 | $\forall x[R(x) \rightarrow Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)]$ | Premisa |
| 3 | parámetro $x_0, P(x_0) \wedge \neg Q(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 5 | $\neg Q(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 6 | $R(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ | $E \forall 1, 3$ |
| 7 | $\neg R(x_0)$ | MT 6,5 |
| 8 | $P(x_0) \wedge \neg R(x_0)$ | $I \wedge 4, 7$ |
| 9 | $\exists x[P(x) \wedge \neg R(x)]$ | $I \exists 8, 3$ |
| 10 | $\exists x[P(x) \wedge \neg R(x)]$ | $E \exists 2, 3 - 9$ |

Ejercicio 44 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \exists x[P(x) \wedge Q(x)], \\ \forall y[P(y) \rightarrow R(y)] \\ \vdash \exists x[R(x) \wedge Q(x)] \end{array}$$

Solución:

| | | |
|----|---------------------------------------|----------------------|
| 1 | $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\forall y[P(y) \rightarrow R(y)]$ | Premisa |
| 3 | parámetro $x_0, P(x_0) \wedge Q(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 5 | $P(x_0) \rightarrow R(x_0)$ | $E \forall 2, 3$ |
| 6 | $R(x_0)$ | $E \rightarrow 5, 4$ |
| 7 | $Q(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 8 | $R(x_0) \wedge Q(x_0)$ | $I \wedge 6, 7$ |
| 9 | $\exists x[R(x) \wedge Q(x)]$ | $I \exists 8, 3$ |
| 10 | $\exists x[R(x) \wedge Q(x)]$ | $E \exists 1, 3 - 9$ |

Ejercicio 45 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{aligned} & \forall x R(x, x), \\ & \forall x \forall y \forall z [\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, z) \rightarrow \neg R(x, z)] \\ & \vdash \forall x \forall y [R(x, y) \vee R(y, x)] \end{aligned}$$

Solución:

| | | |
|----|---|-----------------------|
| 1 | $\forall x R(x, x)$ | Premisa |
| 2 | $\forall x \forall y \forall z [\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, z) \rightarrow \neg R(x, z)]$ | Premisa |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | parámetro y_0 | Supuesto |
| 5 | $\neg(R(x_0, y_0) \vee R(y_0, x_0))$ | Supuesto |
| 6 | $\forall y \forall z [\neg R(x_0, y) \wedge \neg R(y, z) \rightarrow \neg R(x_0, z)]$ | E \forall 2, 3 |
| 7 | $\forall z [\neg R(x_0, y_0) \wedge \neg R(y_0, z) \rightarrow \neg R(x_0, z)]$ | E \forall 6, 4 |
| 8 | $\neg R(x_0, y_0) \wedge \neg R(y_0, x_0) \rightarrow \neg R(x_0, x_0)$ | E \forall 7, 3 |
| 9 | $R(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 10 | $R(x_0, y_0) \vee R(y_0, x_0)$ | I \vee 9 |
| 11 | \perp | E \neg 5, 10 |
| 12 | $\neg R(x_0, y_0)$ | I \neg 9 – 11 |
| 13 | $R(y_0, x_0)$ | Supuesto |
| 14 | $R(x_0, y_0) \vee R(y_0, x_0)$ | I \vee 13 |
| 15 | \perp | E \neg 5, 14 |
| 16 | $\neg R(y_0, x_0)$ | I \neg 13 – 15 |
| 17 | $\neg R(x_0, y_0) \wedge \neg R(y_0, x_0)$ | I \wedge 12, 16 |
| 18 | $\neg R(x_0, x_0)$ | E \rightarrow 8, 17 |
| 19 | $R(x_0, x_0)$ | E \forall 1, 3 |
| 20 | \perp | E \neg 18, 19 |
| 21 | $R(x_0, y_0) \vee R(y_0, x_0)$ | RAA 5 – 20 |
| 22 | $\forall y [R(x_0, y) \vee R(y, x_0)]$ | I \forall 4 – 21 |
| 23 | $\forall x \forall y [R(x, y) \vee R(y, x)]$ | I \forall 3 – 22 |

Ejercicio 46 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\exists x \exists y [R(x, y) \vee R(y, x)]$$

$$\vdash \exists x \exists y R(x, y)$$

Solución:

| | | |
|----|--|--------------------------|
| 1 | $\exists x \exists y [R(x, y) \vee R(y, x)]$ | Premisa |
| 2 | parámetro x_0 , $\exists y [R(x_0, y) \vee R(y, x_0)]$ | Supuesto |
| 3 | parámetro y_0 , $R(x_0, y_0) \vee R(y_0, x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $R(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 5 | $\exists y R(x_0, y)$ | $I \exists 4, 3$ |
| 6 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | $I \exists 5, 2$ |
| 7 | $R(y_0, x_0)$ | Supuesto |
| 8 | $\exists y R(y_0, y)$ | $I \exists 7, 2$ |
| 9 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | $I \exists 8, 3$ |
| 10 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | $E \vee 3, 4 - 6, 7 - 9$ |
| 11 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | $E \exists 2, 3 - 10$ |
| 12 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | $E \exists 1, 2 - 11$ |

Ejercicio 47 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x[P(x) \rightarrow \exists yQ(y)],$$

$$\vdash \forall x\exists y[P(x) \rightarrow Q(y)]$$

Solución:

| | | |
|----|---|----------------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow \exists yQ(y)]$ | Premisa |
| 2 | parámetro a | Premisa |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $P(x_0) \vee \neg P(x_0)$ | LEM |
| 5 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 6 | $P(x_0) \rightarrow \exists yQ(y)$ | $E\forall$ 1, 3 |
| 7 | $\exists yQ(y)$ | $E\rightarrow$ 6, 5 |
| 8 | parámetro $y_0, Q(y_0)$ | Supuesto |
| 9 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 10 | $Q(y_0)$ | Hipótesis |
| 11 | $P(x_0) \rightarrow Q(y_0)$ | $I\rightarrow$ 9 – 10 |
| 12 | $\exists y[P(x_0) \rightarrow Q(y)]$ | $I\exists$ 11, 8 |
| 13 | $\exists y[P(x_0) \rightarrow Q(y)]$ | $E\exists$ 8, 9 – 12 |
| 14 | $\neg P(x_0)$ | Supuesto |
| 15 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 16 | \perp | $E\neg$ 14, 15 |
| 17 | $Q(a)$ | $E\perp$ 16 |
| 18 | $P(x_0) \rightarrow Q(a)$ | $I\rightarrow$ 15 – 17 |
| 19 | $\exists y[P(x_0) \rightarrow Q(y)]$ | $I\exists$ 18, 2 |
| 20 | $\exists y[P(x_0) \rightarrow Q(y)]$ | $E\vee$ 4, 5 – 13, 14 – 19 |
| 21 | $\forall x\exists y[P(x) \rightarrow Q(y)]$ | $I\forall$ 3 – 20 |

Ejercicio 48 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x[P(x) \rightarrow \neg C(x)],$$

$$\exists x[C(x) \wedge B(x)]$$

$$\vdash \exists x[B(x) \wedge \neg P(x)]$$

Solución:

| | | |
|----|--|-----------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow \neg C(x)]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x[C(x) \wedge B(x)]$ | Premisa |
| 3 | parámetro x_0 , $C(x_0) \wedge B(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $B(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 5 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 6 | $P(x_0) \rightarrow \neg C(x_0)$ | $E \forall 1, 3$ |
| 7 | $\neg C(x_0)$ | $E \rightarrow 6, 5$ |
| 8 | $C(x_0)$ | $E \wedge 3$ |
| 9 | \perp | $E \neg 7, 8$ |
| 10 | $\neg P(x_0)$ | $I \neg 5 - 9$ |
| 11 | $B(x_0) \wedge \neg P(x_0)$ | $I \wedge 4, 10$ |
| 12 | $\exists x[B(x) \wedge \neg P(x)]$ | $I \exists 11, 3$ |
| 13 | $\exists x[B(x) \wedge \neg P(x)]$ | $E \exists 2, 3 - 12$ |

Ejercicio 49 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x \exists y [P(x) \rightarrow Q(y)]$$

$$\vdash \forall x [P(x) \rightarrow \exists y Q(y)]$$

Solución:

| | | |
|----|---|-----------------------|
| 1 | $\forall x \exists y [P(x) \rightarrow Q(y)]$ | Premisa |
| 2 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 3 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $\exists y [P(x_0) \rightarrow Q(y)]$ | $E \forall 1, 2$ |
| 5 | parámetro $y_0, P(x_0) \rightarrow Q(y_0)$ | Supuesto |
| 6 | $Q(y_0)$ | $E \rightarrow 5, 3$ |
| 7 | $\exists y Q(y)$ | $I \exists 6, 5$ |
| 8 | $\exists y Q(y)$ | $E \exists 4, 5 - 7$ |
| 9 | $P(x_0) \rightarrow \exists y Q(y)$ | $I \rightarrow 3 - 8$ |
| 10 | $\forall x [P(x) \rightarrow \exists y Q(y)]$ | $I \forall 2 - 9$ |

Ejercicio 50 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\neg \forall x [P(x) \rightarrow Q(a)]$$

$$\vdash \exists x P(x) \wedge \neg Q(a)$$

Solución:

| | | |
|----|--|-----------------------|
| 1 | $\neg \forall x [P(x) \rightarrow Q(a)]$ | Premisa |
| 2 | $\neg (\exists x P(x) \wedge \neg Q(a))$ | Supuesto |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 5 | $\neg Q(a)$ | Supuesto |
| 6 | $\exists x P(x)$ | I \exists 4,3 |
| 7 | $\exists x P(x) \wedge \neg Q(a)$ | I \wedge 6,5 |
| 8 | \perp | E \neg 2,7 |
| 9 | $Q(a)$ | RAA 5 – 8 |
| 10 | $P(x_0) \rightarrow Q(a)$ | I \rightarrow 4 – 9 |
| 11 | $\forall x [P(x) \rightarrow Q(a)]$ | I \forall 3 – 10 |
| 12 | \perp | E \neg 1,11 |
| 13 | $\exists x P(x) \wedge \neg Q(a)$ | RAA 2 – 12 |

Ejercicio 51 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{aligned} & \forall xP(x), \\ & \forall x[P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x)], \\ & \exists x\neg Q(x) \\ & \vdash \exists xR(x) \end{aligned}$$
Solución:

| | | |
|----|--|----------------------------|
| 1 | $\forall xP(x)$ | Premisa |
| 2 | $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x)]$ | Premisa |
| 3 | $\exists x\neg Q(x)$ | Premisa |
| 4 | parámetro $x_0, \neg Q(x_0)$ | Supuesto |
| 5 | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0) \vee R(x_0)$ | $E\forall 2, 4$ |
| 6 | $P(x_0)$ | $E\forall 1, 4$ |
| 7 | $Q(x_0) \vee R(x_0)$ | $E\rightarrow 5, 6$ |
| 8 | $Q(x_0)$ | Supuesto |
| 9 | \perp | $E\neg 4, 8$ |
| 10 | $R(x_0)$ | $E\perp 9$ |
| 11 | $R(x_0)$ | Supuesto |
| 12 | $R(x_0)$ | $E\vee 7, 8 - 10, 11 - 11$ |
| 13 | $\exists xR(x)$ | $I\exists 12, 4$ |
| 14 | $\exists xR(x)$ | $E\exists 3, 4 - 13$ |

Ejercicio 52 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x \forall y [R(x, y) \rightarrow R(y, x)],$$

$$\forall x \forall y [R(x, y) \vee R(y, x)]$$

$$\vdash \forall x \forall y \forall z [\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, z) \rightarrow \neg R(x, z)]$$

Solución:

| | | |
|----|---|-----------------------------|
| 1 | $\forall x \forall y [R(x, y) \rightarrow R(y, x)]$ | Premisa |
| 2 | $\forall x \forall y [R(x, y) \vee R(y, x)]$ | Premisa |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | parámetro y_0 | Supuesto |
| 5 | parámetro z_0 | Supuesto |
| 6 | $\neg R(x_0, y_0) \wedge \neg R(y_0, z_0)$ | Supuesto |
| 7 | $\forall y [R(x_0, y) \vee R(y, x_0)]$ | E \forall 2, 3 |
| 8 | $R(x_0, y_0) \vee R(y_0, x_0)$ | E \forall 7, 4 |
| 9 | $R(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 10 | $\neg R(x_0, y_0)$ | E \wedge 6 |
| 11 | \perp | E \neg 10, 9 |
| 12 | $\neg R(x_0, z_0)$ | E \perp 11 |
| 13 | $R(y_0, x_0)$ | Supuesto |
| 14 | $\forall y [R(y_0, y) \rightarrow R(y, y_0)]$ | E \forall 1, 4 |
| 15 | $R(y_0, x_0) \rightarrow R(x_0, y_0)$ | E \forall 14, 3 |
| 16 | $R(x_0, y_0)$ | E \rightarrow 15, 13 |
| 17 | $\neg R(x_0, y_0)$ | E \wedge 6 |
| 18 | \perp | E \neg 17, 16 |
| 19 | $\neg R(x_0, z_0)$ | E \perp 18 |
| 20 | $\neg R(x_0, z_0)$ | E \vee 8, 9 – 12, 13 – 19 |
| 21 | $\neg R(x_0, y_0) \wedge \neg R(y_0, z_0) \rightarrow \neg R(x_0, z_0)$ | I \rightarrow 6 – 20 |
| 22 | $\forall z [\neg R(x_0, y_0) \wedge \neg R(y_0, z) \rightarrow \neg R(x_0, z)]$ | I \forall 5 – 21 |
| 23 | $\forall y \forall z [\neg R(x_0, y) \wedge \neg R(y, z) \rightarrow \neg R(x_0, z)]$ | I \forall 4 – 22 |
| 24 | $\forall x \forall y \forall z [\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, z) \rightarrow \neg R(x, z)]$ | I \forall 3 – 23 |

Ejercicio 53 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\neg \forall x P(x)$$

$$\vdash \exists x \neg P(x)$$

Solución:

| | | |
|----|--------------------------|-------------------|
| 1 | $\neg(\forall x)P(x)$ | Premisa |
| 2 | $\neg\exists x\neg P(x)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $\neg P(x_0)$ | Supuesto |
| 5 | $\exists x\neg P(x)$ | I \exists 4, 3 |
| 6 | \perp | E \neg 2, 5 |
| 7 | $P(x_0)$ | RAA 4 – 6 |
| 8 | $\forall x P(x)$ | I \forall 3 – 7 |
| 9 | \perp | E \neg 1, 8 |
| 10 | $\exists x\neg P(x)$ | RAA 2 – 9 |

Ejercicio 54 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x \forall y [(\exists z R(y, z)) \rightarrow R(x, y)],$$

$$\exists x \exists y R(x, y)$$

$$\vdash \forall x \forall y R(x, y)$$

Solución:

| | | |
|----|---|-----------------------|
| 1 | $\forall x \forall y [(\exists z R(y, z)) \rightarrow R(x, y)]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x \exists y R(x, y)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | parámetro y_0 | Supuesto |
| 5 | parámetro $x_1, \exists y R(x_1, y)$ | Supuesto |
| 6 | parámetro $y_1, R(x_1, y_1)$ | Supuesto |
| 7 | $\forall y [(\exists z R(y, z)) \rightarrow R(x_0, y)]$ | E \forall 1, 3 |
| 8 | $(\exists z R(y_0, z)) \rightarrow R(x_0, y_0)$ | E \forall 7, 4 |
| 9 | $\forall y [(\exists z R(y, z)) \rightarrow R(y_0, y)]$ | E \forall 1, 4 |
| 10 | $(\exists z R(x_1, z)) \rightarrow R(y_0, x_1)$ | E \forall 9, 5 |
| 11 | $R(y_0, x_1)$ | E \rightarrow 10, 5 |
| 12 | $\exists z R(y_0, z)$ | I \exists 11, 5 |
| 13 | $R(x_0, y_0)$ | E \rightarrow 8, 12 |
| 14 | $R(x_0, y_0)$ | E \exists 5, 6 – 13 |
| 15 | $R(x_0, y_0)$ | E \exists 2, 5 – 14 |
| 16 | $\forall y R(x_0, y)$ | I \forall 4 – 15 |
| 17 | $\forall x \forall y R(x, y)$ | I \forall 3 – 16 |

Ejercicio 55 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)] \rightarrow \forall y[P(y) \rightarrow R(y)],$$

$$\exists x[P(x) \wedge S(x)],$$

$$\forall x[P(x) \rightarrow \neg R(x)]$$

$$\vdash \exists x[S(x) \wedge Q(x)]$$

Solución:

| | | |
|----|---|-----------------------|
| 1 | $\exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)] \rightarrow \forall y[P(y) \rightarrow R(y)]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x[P(x) \wedge S(x)]$ | Premisa |
| 3 | $\forall x[P(x) \rightarrow \neg R(x)]$ | Premisa |
| 4 | parámetro i , $P(i) \wedge S(i)$ | Supuesto |
| 5 | $S(i)$ | $E \wedge 4$ |
| 6 | $\neg Q(i)$ | Supuesto |
| 7 | $P(i)$ | $E \wedge 4$ |
| 8 | $P(i) \wedge \neg Q(i)$ | $I \wedge 7, 6$ |
| 9 | $\exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)]$ | $I \exists 7, 6$ |
| 10 | $\forall y[P(y) \rightarrow R(y)]$ | $E \rightarrow 1, 9$ |
| 11 | $P(i) \rightarrow R(i)$ | $E \forall 10, 4$ |
| 12 | $P(i) \rightarrow \neg R(i)$ | $E \forall 3, 4$ |
| 13 | $R(i)$ | $E \rightarrow 11, 7$ |
| 14 | $\neg R(i)$ | $E \rightarrow 12, 7$ |
| 15 | \perp | $E \neg 13, 14$ |
| 16 | $Q(i)$ | RAA 6 – 15 |
| 17 | $S(i) \wedge Q(i)$ | $I \wedge 5, 16$ |
| 18 | $\exists x[S(x) \wedge Q(x)]$ | $I \exists 17, 4$ |
| 19 | $\exists x[S(x) \wedge Q(x)]$ | $E \exists 2, 4 - 18$ |

Ejercicio 56 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\vdash \neg \exists x \forall y [P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y)]$$

Solución:

| | | |
|----|--|---------------------------|
| 1 | $\exists x \forall y [P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y)]$ | Supuesto |
| 2 | parámetro i , $\forall y [P(y, i) \leftrightarrow \neg P(y, y)]$ | Supuesto |
| 3 | $P(i, i) \leftrightarrow \neg P(i, i)$ | $E \forall 2$ |
| 4 | $P(i, i) \vee \neg P(i, i)$ | LEM |
| 5 | $P(i, i)$ | Supuesto |
| 6 | $P(i, i) \rightarrow \neg P(i, i)$ | $E \leftrightarrow 3$ |
| 7 | $\neg P(i, i)$ | $E \rightarrow 6, 5$ |
| 8 | \perp | $E \neg 5, 7$ |
| 9 | $\neg P(i, i)$ | Supuesto |
| 10 | $\neg P(i, i) \rightarrow P(i, i)$ | $E \leftrightarrow 3$ |
| 11 | $P(i, i)$ | $E \rightarrow 10, 9$ |
| 12 | \perp | $E \neg 11, 9$ |
| 13 | \perp | $E \vee 4, 5 - 8, 9 - 12$ |
| 14 | \perp | $E \exists 1, 2 - 13$ |
| 15 | $\neg \exists x \forall y [P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y)]$ | $E \neg 1 - 14$ |

Ejercicio 57 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{aligned} & \forall x[\exists yR(x, y) \rightarrow \exists y[\forall zR(y, z) \wedge R(x, y)]], \\ & \exists x\exists yR(x, y) \\ & \vdash \exists x\forall yR(x, y) \end{aligned}$$

Solución:

| | | |
|----|---|----------------------|
| 1 | $\forall x[\exists yR(x, y) \rightarrow \exists y[\forall z.R(y, z) \wedge R(x, y)]]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x\exists yR(x, y)$ | Premisa |
| 3 | parámetro $x_0, \exists yR(x_0, y)$ | Supuesto |
| 4 | $\exists yR(x_0, y) \rightarrow \exists y[\forall zR(y, z) \wedge R(x_0, y)]$ | E \forall 1, 2 |
| 5 | $\exists y\forall zR(y, z) \wedge R(x_0, y)$ | E \rightarrow 4, 2 |
| 6 | parámetro $y_0, \forall zR(y_0, z) \wedge R(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 7 | $\forall zR(y_0, z)$ | E \wedge 6 |
| 8 | $\exists x\forall yR(x, y)$ | I \exists 7 |
| 9 | $\exists x\forall yR(x, y)$ | E \exists 6 – 8 |
| 10 | $\exists x\forall yR(x, y)$ | E \exists 2, 3 – 9 |

Ejercicio 58 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x[P(x) \rightarrow \forall y[Q(y) \rightarrow R(x, y)]],$$

$$\exists x[P(x) \wedge \exists y\neg R(x, y)]$$

$$\vdash \neg\forall xQ(x)$$

Solución:

| | | |
|----|---|------------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow \forall y[Q(y) \rightarrow R(x, y)]]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x[P(x) \wedge \exists y\neg R(x, y)]$ | Premisa |
| 3 | $\forall xQ(x)$ | Supuesto |
| 4 | parámetro $x_0, P(x_0) \wedge \exists y\neg R(x_0, y)$ | Supuesto |
| 5 | $\exists y\neg R(x_0, y)$ | $E \wedge 4$ |
| 6 | parámetro $y_0, \neg R(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 7 | $P(x_0) \rightarrow \forall y[Q(y) \rightarrow R(x_0, y)]$ | $E \forall 1, 4$ |
| 8 | $P(x_0)$ | $E \wedge 4$ |
| 9 | $\forall y[Q(y) \rightarrow R(x_0, y)]$ | $E \rightarrow 7, 8$ |
| 10 | $Q(y_0) \rightarrow R(x_0, y_0)$ | $E \forall 9, 6$ |
| 11 | $Q(y_0)$ | $E \forall 3, 6$ |
| 12 | $R(x_0, y_0)$ | $E \rightarrow 10, 11$ |
| 13 | \perp | $E \neg 5, 12$ |
| 14 | \perp | $E \exists 5, 6 - 13$ |
| 15 | \perp | $E \exists 2, 4 - 14$ |
| 16 | $\neg\forall xQ(x)$ | $I \neg 3 - 15$ |

Ejercicio 59 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \exists x[P(x) \rightarrow \forall yQ(y)] \\ \vdash \exists x\forall y[P(x) \rightarrow Q(y)] \end{array}$$

Solución:

| | | |
|----|---|-----------------------|
| 1 | $\exists x[P(x) \rightarrow \forall yQ(y)]$ | Premisa |
| 2 | parámetro $x_0, P(x_0) \rightarrow \forall yQ(y)$ | Supuesto |
| 3 | parámetro y_0 | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 5 | $\forall yQ(y)$ | $E \rightarrow 2, 4$ |
| 6 | $Q(y_0)$ | $E \forall 5, 3$ |
| 7 | $P(x_0) \rightarrow Q(y_0)$ | $I \rightarrow 4 - 6$ |
| 8 | $\forall y[P(x_0) \rightarrow Q(y)]$ | $I \forall 3 - 7$ |
| 9 | $\exists x\forall y[P(x) \rightarrow Q(y)]$ | $I \exists 8, 2$ |
| 10 | $\exists x\forall y[P(x) \rightarrow Q(y)]$ | $E \exists 1, 2 - 9$ |

Ejercicio 60 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{array}{l} \exists y \exists z [\forall x \neg R(x, y) \vee \forall x \neg R(x, z)] \\ \vdash \neg \forall y \forall z \exists x [R(x, y) \wedge R(x, z)] \end{array}$$

Solución:

| | | |
|----|--|-----------------------------|
| 1 | $\exists y \exists z [\forall x \neg R(x, y) \vee \forall x \neg R(x, z)]$ | Premisa |
| 2 | $\forall y \forall z \exists x [R(x, y) \wedge R(x, z)]$ | Supuesto |
| 3 | parámetro y_0 , $\exists z [\forall x \neg R(x, y_0) \vee \forall x \neg R(x, z)]$ | Supuesto |
| 4 | parámetro z_0 , $\forall x \neg R(x, y_0) \vee \forall x \neg R(x, z_0)$ | Supuesto |
| 5 | $\forall x \neg R(x, y_0)$ | Supuesto |
| 6 | $\forall z \exists x [R(x, y_0) \wedge R(x, z)]$ | E \forall 2, 3 |
| 7 | $\exists x [R(x, y_0) \wedge R(x, y_0)]$ | E \forall 6, 3 |
| 8 | parámetro x_1 , $R(x_1, y_0) \wedge R(x_1, y_0)$ | Supuesto |
| 9 | $\neg R(x_1, y_0)$ | E \forall 5, 8 |
| 10 | $R(x_1, y_0)$ | E \wedge 8 |
| 11 | \perp | E \neg 9, 10 |
| 12 | \perp | E \exists 7, 8 – 11 |
| 13 | $\forall x \neg R(x, z_0)$ | Supuesto |
| 14 | $\forall z \exists x [R(x, y_0) \wedge R(x, z)]$ | E \forall 2, 4 |
| 15 | $\exists x [R(x, y_0) \wedge R(x, z_0)]$ | E \forall 14, 3 |
| 16 | parámetro x_2 , $R(x_2, y_0) \wedge R(x_2, z_0)$ | Supuesto |
| 17 | $R(x_2, y_0)$ | E \wedge 16 |
| 18 | $\neg R(x_2, y_0)$ | E \forall 13, 16 |
| 19 | \perp | E \neg 17, 18 |
| 20 | \perp | E \exists 15, 16 – 19 |
| 21 | \perp | E \vee 4, 5 – 12, 13 – 20 |
| 22 | \perp | E \exists 3, 4 – 21 |
| 23 | \perp | E \exists 1, 3 – 22 |
| 24 | $\neg \forall y \forall z \exists x [R(x, y) \wedge R(x, z)]$ | I \neg 2 – 23 |

Ejercicio 61 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\exists x[P(x) \rightarrow \forall y[P(y) \rightarrow Q(y)]],$$

$$\neg \exists xQ(x)$$

$$\vdash \neg \forall xP(x)$$

Solución:

| | | |
|----|--|----------------------|
| 1 | $\exists x[P(x) \rightarrow \forall y[P(y) \rightarrow Q(y)]]$ | Premisa |
| 2 | $\neg \exists xQ(x)$ | Premisa |
| 3 | $\forall xP(x)$ | Supuesto |
| 4 | parámetro $x_0, P(x_0) \rightarrow \forall y[P(y) \rightarrow Q(y)]$ | Supuesto |
| 5 | $P(x_0)$ | $E \forall 3,4$ |
| 6 | $\forall y[P(y) \rightarrow Q(y)]$ | $E \rightarrow 4,5$ |
| 7 | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ | $E \forall 6,4$ |
| 8 | $Q(x_0)$ | $E \rightarrow 5,7$ |
| 9 | $\exists xQ(x)$ | $I \exists 8,4$ |
| 10 | \perp | $E \neg 2,9$ |
| 11 | \perp | $E \exists 1,4 - 10$ |
| 12 | $\neg \forall xP(x)$ | $I \neg 3 - 11$ |

Ejercicio 62 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\neg \exists x [P(x) \wedge \neg \forall y [Q(y) \rightarrow R(x, y)]] ,$$

$$\exists x [P(x) \wedge \exists y \neg R(x, y)]$$

$$\vdash \exists x \neg Q(x)$$

Solución:

| | | |
|----|--|-----------------------|
| 1 | $\neg \exists x [P(x) \wedge \neg \forall y [Q(y) \rightarrow R(x, y)]]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x [P(x) \wedge \exists y \neg R(x, y)]$ | Premisa |
| 3 | parámetro $x_0, P(x_0) \wedge \exists y \neg R(x_0, y)$ | Supuesto |
| 4 | $\exists y \neg R(x_0, y)$ | E \wedge 3 |
| 5 | parámetro $y_0, \neg R(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 6 | $Q(y_0)$ | Supuesto |
| 7 | $P(x_0)$ | E \wedge 3 |
| 8 | $\forall y [Q(y) \rightarrow R(x_0, y)]$ | Supuesto |
| 9 | $Q(y_0) \rightarrow R(x_0, y_0)$ | E \forall 8, 5 |
| 10 | $\neg Q(y_0)$ | MT 9, 5 |
| 11 | \perp | E \neg 10, 6 |
| 12 | $\neg \forall y [Q(y) \rightarrow R(x_0, y)]$ | I \neg 8 – 11 |
| 13 | $P(x_0) \wedge \neg \forall y [Q(y) \rightarrow R(x_0, y)]$ | I \wedge 7, 12 |
| 14 | \perp | E \neg 1, 14 |
| 15 | $\neg Q(y_0)$ | I \neg 6 – 15 |
| 16 | $\exists x \neg Q(x)$ | I \exists 16, 5 |
| 17 | $\exists x \neg Q(x)$ | E \exists 4, 5 – 17 |
| 18 | $\exists x \neg Q(x)$ | E \exists 2, 3 – 18 |

Ejercicio 63 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x \forall y [\exists z [R(z, y) \wedge \neg R(x, z)] \rightarrow R(x, y)],$$

$$\neg \exists x R(x, x)$$

$$\vdash \forall x \forall y [\neg R(y, x) \rightarrow \neg R(x, y)]$$

Solución:

| | | |
|----|---|------------------------|
| 1 | $\forall x \forall y [\exists z [R(z, y) \wedge \neg R(x, z)] \rightarrow R(x, y)]$ | Premisa |
| 2 | $\neg \exists x R(x, x)$ | Premisa |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | parámetro y_0 | Supuesto |
| 5 | $\neg R(y_0, x_0)$ | Supuesto |
| 6 | $R(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 7 | $\forall y [\exists z [R(z, y) \wedge \neg R(y_0, z)] \rightarrow R(y_0, y)]$ | E \forall 1, 4 |
| 8 | $\exists z [R(z, y_0) \wedge \neg R(y_0, z)] \rightarrow R(y_0, y_0)$ | E \forall 7, 4 |
| 9 | $R(x_0, y_0) \wedge \neg R(y_0, x_0)$ | I \wedge 6, 5 |
| 10 | $\exists z [R(z, y_0) \wedge \neg R(y_0, z)]$ | I \exists 9, 3 |
| 11 | $R(y_0, y_0)$ | E \rightarrow 8, 10 |
| 12 | $\exists x R(x, x)$ | I \exists 11, 4 |
| 13 | \perp | E \neg 2, 12 |
| 14 | $\neg R(x_0, y_0)$ | I \neg 6 – 13 |
| 15 | $\neg R(y_0, x_0) \rightarrow \neg R(x_0, y_0)$ | I \rightarrow 5 – 14 |
| 16 | $\forall y [\neg R(y, x_0) \rightarrow \neg R(x_0, y)]$ | I \forall 4 – 15 |
| 17 | $\forall x \forall y [\neg R(y, x) \rightarrow \neg R(x, y)]$ | I \forall 3 – 16 |

Ejercicio 64 *Demostrar mediante deducción natural*

$$P(a) \rightarrow \neg \forall x \neg R(x),$$

$$\vdash \neg \forall x [\neg R(x) \wedge P(a)]$$

Solución:

| | | |
|----|---|---------------------|
| 1 | $P(a) \rightarrow \neg \forall x \neg R(x)$ | Premisa |
| 2 | parámetro b | Premisa |
| 3 | $\forall x [\neg R(x) \wedge P(a)]$ | Supuesto |
| 4 | $\neg R(b) \wedge P(a)$ | $E \forall$ 3,2 |
| 5 | $P(a)$ | $E \wedge$ 4 |
| 6 | $\neg \forall x \neg R(x)$ | $E \rightarrow$ 1,5 |
| 7 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 8 | $\neg R(x_0) \wedge P(a)$ | $E \forall$ 3,7 |
| 9 | $\neg R(x_0)$ | $E \wedge$ 8 |
| 10 | $\forall x \neg R(x)$ | $I \forall$ 5 – 8 |
| 11 | \perp | $E \neg$ 4,10 |
| 12 | $\neg \forall x [\neg R(x) \wedge P(a)]$ | $I \neg$ 3 – 11 |

Ejercicio 65 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x \forall y \forall z [P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow R(x, z)],$$

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

$$\vdash \forall x \exists y R(x, y)$$

Solución:

| | | |
|----|--|------------------------|
| 1 | $\forall x \forall y \forall z [P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow R(x, z)]$ | Premisa |
| 2 | $\forall x \exists y P(x, y)$ | Premisa |
| 3 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 4 | $\exists y P(x_0, y)$ | $E \forall 2, 3$ |
| 5 | parámetro $y_0, P(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 6 | $\exists y P(y_0, y)$ | $E \forall 2, 5$ |
| 7 | parámetro $y_1, P(y_0, y_1)$ | Supuesto |
| 8 | $\forall y \forall z [P(x_0, y) \wedge P(y, z) \rightarrow R(x_0, z)]$ | $E \forall 1, 3$ |
| 9 | $\forall z [P(x_0, y_0) \wedge P(y_0, z) \rightarrow R(x_0, z)]$ | $E \forall 8, 5$ |
| 10 | $P(x_0, y_0) \wedge P(y_0, y_1) \rightarrow R(x_0, y_1)$ | $E \forall 9, 7$ |
| 11 | $P(x_0, y_0) \wedge P(y_0, y_1)$ | $I \wedge 5, 7$ |
| 12 | $R(x_0, y_1)$ | $E \rightarrow 10, 11$ |
| 13 | $\exists y R(x_0, y)$ | $I \exists 12, 7$ |
| 14 | $\exists y R(x_0, y)$ | $E \exists 6, 7 - 13$ |
| 15 | $\exists y R(x_0, y)$ | $E \exists 4, 5 - 14$ |
| 16 | $\forall x \exists y R(x, y)$ | $I \forall 3 - 15$ |

Ejercicio 66 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{aligned} & \forall x[P(x) \rightarrow (\exists yQ(x, y) \rightarrow \exists yQ(y, x))], \\ & \forall x[\exists yQ(y, x) \rightarrow Q(x, x)], \\ & \neg\exists xQ(x, x) \\ & \vdash \forall x[P(x) \rightarrow \forall y\neg Q(x, y)] \end{aligned}$$

Solución:

| | | |
|----|---|-----------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow (\exists yQ(x, y) \rightarrow \exists yQ(y, x))]$ | Premisa |
| 2 | $\forall x[\exists yQ(y, x) \rightarrow Q(x, x)]$ | Premisa |
| 3 | $\neg\exists xQ(x, x)$ | Premisa |
| 4 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 5 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 6 | parámetro y_0 | Supuesto |
| 7 | $Q(x_0, y_0)$ | Supuesto |
| 8 | $\exists yQ(y, y_0) \rightarrow Q(y_0, y_0)$ | $E\forall 2, 6$ |
| 9 | $\exists yQ(y, y_0)$ | $I\exists 7, 4$ |
| 10 | $Q(y_0, y_0)$ | $E\rightarrow 8, 9$ |
| 11 | $\exists xQ(x, x)$ | $I\exists 10, 6$ |
| 12 | \perp | $E\neg 3, 11$ |
| 13 | $\neg Q(x_0, y_0)$ | $I\neg 7 - 12$ |
| 14 | $\forall y\neg Q(x_0, y)$ | $I\forall 6 - 13$ |
| 15 | $P(x_0) \rightarrow \forall y\neg Q(x_0, y)$ | $I\rightarrow 5 - 14$ |
| 16 | $\forall x[P(x) \rightarrow \forall y\neg Q(x, y)]$ | $I\forall 4 - 15$ |

Ejercicio 67 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\begin{aligned} & \forall x[Q(x) \rightarrow \neg R(x)], \\ & \forall x[P(x) \rightarrow Q(x) \vee S(x)], \\ & \exists x[P(x) \wedge R(x)] \\ & \vdash \exists x[P(x) \wedge S(x)] \end{aligned}$$

Solución:

| | | |
|----|--|-----------------------------|
| 1 | $\forall x[Q(x) \rightarrow \neg R(x)]$ | Supuesto |
| 2 | $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x) \vee S(x)]$ | Supuesto |
| 3 | $\exists x[P(x) \wedge R(x)]$ | Supuesto |
| 4 | parámetro x_0 | Supuesto |
| 5 | $P(x_0) \wedge R(x_0)$ | Supuesto |
| 6 | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0) \vee S(x_0)$ | $E \forall 2$ |
| 7 | $P(x_0)$ | $E \wedge 5$ |
| 8 | $Q(x_0) \vee S(x_0)$ | $E \rightarrow 6, 7$ |
| 9 | $Q(x_0)$ | Supuesto |
| 10 | $Q(x_0) \rightarrow \neg R(x_0)$ | $E \forall 1, 4$ |
| 11 | $\neg R(x_0)$ | $E \rightarrow 10, 9$ |
| 12 | $R(x_0)$ | $E \wedge 5$ |
| 13 | \perp | $E \neg 11, 12$ |
| 14 | $S(x_0)$ | $E \perp 13$ |
| 15 | $P(x_0) \wedge S(x_0)$ | $I \wedge 7, 14$ |
| 16 | $\exists x[P(x) \wedge S(x)]$ | $I \exists 15, 4$ |
| 17 | $S(x_0)$ | Supuesto |
| 18 | $P(x_0) \wedge S(x_0)$ | $I \wedge 7, 17$ |
| 19 | $\exists x[P(x) \wedge S(x)]$ | $I \exists 18, 4$ |
| 20 | $\exists x[P(x) \wedge S(x)]$ | $E \vee 8, 9 - 16, 17 - 19$ |
| 21 | $\exists x[P(x) \wedge S(x)]$ | $E \exists 3, 4 - 20$ |

Ejercicio 68 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x[P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x))],$$

$$\exists x[P(x) \vee \neg R(x)]$$

$$\vdash \exists x[R(x) \rightarrow S(x)]$$

Solución:

| | | |
|----|---|---------------------------|
| 1 | $\forall x[P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x))]$ | Premisa |
| 2 | $\exists x[P(x) \vee \neg R(x)]$ | Premisa |
| 3 | parámetro $x_0, P(x_0) \vee \neg R(x_0)$ | Supuesto |
| 4 | $P(x_0)$ | Supuesto |
| 5 | $P(x_0) \rightarrow (R(x_0) \rightarrow S(x_0))$ | E \forall 1 |
| 6 | $R(x_0) \rightarrow S(x_0)$ | E \rightarrow 5, 4 |
| 7 | $\neg R(x_0)$ | Supuesto |
| 8 | $R(x_0)$ | Supuesto |
| 9 | \perp | E \neg 7, 8 |
| 10 | $S(x_0)$ | E \perp 9 |
| 11 | $R(x_0) \rightarrow S(x_0)$ | I \rightarrow 8 – 10 |
| 12 | $R(x_0) \rightarrow S(x_0)$ | E \vee 3, 4 – 6, 7 – 11 |
| 13 | $\exists x[R(x) \rightarrow S(x)]$ | I \exists 12 |
| 14 | $\exists x[R(x) \rightarrow S(x)]$ | E \exists 2, 3 – 13 |