

# Lógica informática (2010–11)

## Tema 2: Deducción natural proposicional

José A. Alonso Jiménez  
Andrés Cordón Franco  
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 2: Deducción natural proposicional

1. Reglas de deducción natural
2. Reglas derivadas
3. Resumen de reglas de deducción natural

## Tema 2: Deducción natural proposicional

### 1. Reglas de deducción natural

- Reglas de la conjunción
- Reglas de la doble negación
- Regla de eliminación del condicional
- Regla derivada de modus tollens (MT)
- Regla de introducción del condicional
- Reglas de la disyunción
- Regla de copia
- Reglas de la negación
- Reglas del bicondicional

### 2. Reglas derivadas

### 3. Resumen de reglas de deducción natural

3 / 28

## Reglas de la conjunción

- ▶ Regla de introducción de la conjunción:  $\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$
- ▶ Reglas de eliminación de la conjunción:  $\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1$        $\frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$
- ▶ Ejemplo:  $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ :
  - 1     $p \wedge q$     premisa
  - 2     $r$             premisa
  - 3     $q$              $\wedge e_2$  1
  - 4     $q \wedge r$      $\wedge i$  2,3
- ▶ Adecuación de las reglas de la conjunción:
  - ▶  $\wedge i : \{F, G\} \models F \wedge G$
  - ▶  $\wedge e_1 : F \wedge G \models F$
  - ▶  $\wedge e_2 : F \wedge G \models G$

4 / 28

## Reglas de la doble negación

- ▶ Regla de eliminación de la doble negación:

$$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$$

- ▶ Regla de introducción de la doble negación:

$$\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$$

- ▶ Ejemplo:  $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$ :

1	$p$	premisa
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	premisa
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
4	$q \wedge r$	$\neg\neg e$ 2
5	$r$	$\wedge e_2$ 4
6	$\neg\neg p \wedge r$	$\wedge i$ 3, 5

- ▶ Adecuación de las reglas de la doble negación:

- ▶  $\neg\neg e : \{\neg\neg F\} \models F$

- ▶  $\neg\neg i : \{F\} \models \neg\neg F$

## Regla de eliminación del condicional

- ▶ Regla de eliminación del condicional:

$$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$$

- ▶ Ejemplo:  $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$ :  $G$

1	$\neg p \wedge q$	premisa
2	$\neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p$	premisa
3	$r \vee \neg p$	$\rightarrow e$ 1, 2

- ▶ Ejemplo:  $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$ :

1	$p$	premisa
2	$p \rightarrow q$	premisa
3	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
4	$q$	$\rightarrow e$ 1, 2
5	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 1, 3
6	$r$	$\rightarrow e$ 4, 5

## Regla derivada de modus tollens (MT)

► Regla derivada de modus tollens: 
$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} \text{ MT}$$

► Ejemplo:  $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$ :

- 1  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  premisa
- 2  $p$  premisa
- 3  $\neg r$  premisa
- 4  $q \rightarrow r$   $\rightarrow$ e 1, 2
- 5  $\neg q$  MT 3, 4

► Ejemplo:  $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$ :

- 1  $\neg p \rightarrow q$  premisa
- 2  $\neg q$  premisa
- 3  $\neg\neg p$  MT 1, 2

## Regla de introducción del condicional

► Regla de introducción del condicional:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ G \end{array}}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$$

► Ejemplo:  $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$ :

- 1  $p \rightarrow q$  premisa
- 2  $\neg q$  supuesto
- 3  $\neg p$  MT 1, 2
- 4  $\neg q \rightarrow \neg p$   $\rightarrow$ i 2 – 3

► Adecuación de la regla de introducción del condicional:

Si  $F \models G$ , entonces  $\models F \rightarrow G$ .

## Regla de introducción del condicional

- Ejemplo:  $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$ :

1	$\neg q \rightarrow \neg p$	premisa
2	$p$	supuesto
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4	$\neg\neg q$	MT 1, 3
5	$p \rightarrow \neg\neg q$	$\rightarrow i$ 2 – 4

- Ejemplo (de teorema):  $\vdash p \rightarrow p$ :

1	$p$	supuesto
2	$p \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 1 – 1

## Regla de introducción del condicional

- Ejemplo:  $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$ :

1	$q \rightarrow r$	supuesto
2	$\neg q \rightarrow \neg p$	supuesto
3	$p$	supuesto
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5	$\neg\neg q$	MT 2, 4
6	$q$	$\neg\neg e$ 5
7	$r$	$\rightarrow e$ 1, 6
8	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3 – 7
9	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2 – 8
10	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow i$ 1 – 9

## Reglas de la disyunción

- ▶ Reglas de introducción de la disyunción:  $\frac{F}{F \vee G} \forall i_1$        $\frac{G}{F \vee G} \forall i_2$
- ▶ Regla de eliminación de la disyunción:  $\frac{F \vee G \quad \begin{array}{|c|} \hline F \\ \vdots \\ H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline G \\ \vdots \\ H \\ \hline \end{array}}{H} \forall e$
- ▶ Ejemplo:  $p \vee q \vdash q \vee p$ :

1     $p \vee q$     premisa

2	$p$	supuesto
3	$q \vee p$	$\forall i_2$ 2

4	$q$	supuesto
5	$q \vee p$	$\forall i_1$ 4

6     $q \vee p$      $\forall e$  1, 2 – 3, 4 – 5

## Reglas de la disyunción

- ▶ Ejemplo:  $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$ :

1     $q \rightarrow r$             premisa

2	$p \vee q$	supuesto
3	$p$	supuesto
4	$p \vee r$	$\forall i_1$ 3

5	$q$	supuesto
6	$r$	$\rightarrow e$ 1, 5
7	$p \vee r$	$\forall i_2$ 6

8     $p \vee r$              $\forall e$  2, 3 – 4, 5 – 7

9     $p \vee q \rightarrow p \vee r$      $\rightarrow i$  2 – 8

## Regla de copia

- ▶ Ejemplo (usando la regla hyp):  $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$ :

1	$p$	supuesto
2	$q$	supuesto
3	$p$	hyp 1
4	$q \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 2 – 3
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow i$ 1 – 4

## Reglas de la negación

- ▶ Extensiones de la lógica para usar falso:
  - ▶ Extensión de la sintaxis:  $\perp$  es una fórmula proposicional.
  - ▶ Extensión de la semántica:  $I(\perp) = 0$  en cualquier interpretación  $I$ .

- ▶ Reglas de la negación:

- ▶ Regla de eliminación de lo falso: 
$$\frac{\perp}{F} \perp e$$
- ▶ Regla de eliminación de la negación: 
$$\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$$

- ▶ Adecuación de las reglas de la negación:

- ▶  $\perp \models F$
- ▶  $\{F, \neg F\} \models \perp$

## Reglas de la negación

- ▶ Ejemplo:  $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$ :

1	$\neg p \vee q$	premisa																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;"><math>p</math></td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;"><math>\neg p</math></td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;"><math>\perp</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\neg e</math> 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\perp e</math> 4</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">7</td> <td style="padding: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\vee e</math> 1, 3 – 5, 6 – 6</td> </tr> </table>			2	$p$	supuesto	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;"><math>\neg p</math></td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;"><math>\perp</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\neg e</math> 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\perp e</math> 4</td> </tr> </table>			3	$\neg p$	supuesto	4	$\perp$	$\neg e$ 2, 3	5	$q$	$\perp e$ 4	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> </table>			6	$q$	supuesto	7	$q$	$\vee e$ 1, 3 – 5, 6 – 6
2	$p$	supuesto																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;"><math>\neg p</math></td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;"><math>\perp</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\neg e</math> 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\perp e</math> 4</td> </tr> </table>			3	$\neg p$	supuesto	4	$\perp$	$\neg e$ 2, 3	5	$q$	$\perp e$ 4															
3	$\neg p$	supuesto																								
4	$\perp$	$\neg e$ 2, 3																								
5	$q$	$\perp e$ 4																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> </table>			6	$q$	supuesto																					
6	$q$	supuesto																								
7	$q$	$\vee e$ 1, 3 – 5, 6 – 6																								
8	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 2 – 7																								

## Reglas de la negación

- ▶ Regla de introducción de la negación:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg F} \neg i$$

- ▶ Adecuación: Si  $F \models \perp$ , entonces  $\models \neg F$ .
- ▶ Ejemplo:  $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$ :

1	$p \rightarrow q$	premisa												
2	$p \rightarrow \neg q$	premisa												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;"><math>p</math></td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;"><math>q</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\rightarrow e</math> 1, 3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;"><math>\neg q</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\rightarrow e</math> 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;"><math>\perp</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\neg e</math> 4, 5</td> </tr> </table>			3	$p$	supuesto	4	$q$	$\rightarrow e$ 1, 3	5	$\neg q$	$\rightarrow e$ 2, 3	6	$\perp$	$\neg e$ 4, 5
3	$p$	supuesto												
4	$q$	$\rightarrow e$ 1, 3												
5	$\neg q$	$\rightarrow e$ 2, 3												
6	$\perp$	$\neg e$ 4, 5												
7	$\neg p$	$\neg i$ 3 – 6												

## Reglas del bicondicional

► Regla de introducción del bicondicional:

► Ejemplo:  $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ :

$$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$$

1	$p \wedge q$	supuesto
2	$p$	$\wedge e_1$ 1
3	$q$	$\wedge e_2$ 1
4	$q \wedge p$	$\wedge i$ 2, 3

5  $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$   $\rightarrow i$  1 – 4

6	$q \wedge p$	supuesto
7	$q$	$\wedge e_2$ 6
8	$p$	$\wedge e_1$ 6
9	$p \wedge q$	$\wedge i$ 7, 8

10  $q \wedge p \rightarrow p \wedge q$   $\rightarrow i$  6 – 9

## Reglas del bicondicional

► Eliminación del bicondicional:  $\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1$      $\frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$

► Ejemplo:  $p \leftrightarrow q, p \vee q \vdash p \wedge q$ :

1  $p \leftrightarrow q$  premisa

2  $p \vee q$  premisa

3	$p$	supuesto	$q$	supuesto
4	$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow e_1$ 1	$q \rightarrow p$	$\leftrightarrow e_2$ 1
5	$q$	$\rightarrow e$ 4, 3	$p$	$\rightarrow e$ 4', 3'
6	$p \wedge q$	$\wedge i$ 3, 5	$p \wedge q$	$\wedge i$ 3', 5'

7  $p \wedge q$   $\vee e$  2, 3 – 6, 3' – 6'

## Tema 2: Deducción natural proposicional

### 1. Reglas de deducción natural

### 2. Reglas derivadas

Regla del modus tollens

Regla de introducción de doble negación

Regla de reducción al absurdo

Ley del tercio excluido

### 3. Resumen de reglas de deducción natural

## Reglas de modus tollens

- ▶ Regla derivada de modus tollens (MT):

$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} \text{ MT}$$

- ▶ Derivación:

1  $F \rightarrow G$  premisa

2  $\neg G$  premisa

3  $F$  supuesto

4  $G$   $\rightarrow$ e 1, 3

5  $\perp$   $\neg$ e 2, 4

6  $\neg F$   $\neg$ i 2 – 4

## Regla de introducción de doble negación

- ▶ Regla de introducción de la doble negación:

$$\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$$

- ▶ Derivación:

1	$F$	premisa						
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">2</td> <td style="padding-right: 10px;"><math>\neg F</math></td> <td>supuesto</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;">3</td> <td style="padding-right: 10px;"><math>\perp</math></td> <td><math>\neg e</math> 1, 2</td> </tr> </table>			2	$\neg F$	supuesto	3	$\perp$	$\neg e$ 1, 2
2	$\neg F$	supuesto						
3	$\perp$	$\neg e$ 1, 2						
4	$\neg\neg F$	$\neg i$ 2 – 3						

## Regla de reducción al absurdo (RAA)

- ▶ Regla de reducción al absurdo:

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \neg F \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{F} \text{RAA}$$

- ▶ Derivación:

1	$\neg F \rightarrow \perp$	premisa						
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">2</td> <td style="padding-right: 10px;"><math>\neg F</math></td> <td>supuesto</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;">3</td> <td style="padding-right: 10px;"><math>\perp</math></td> <td><math>\rightarrow e</math> 1, 2</td> </tr> </table>			2	$\neg F$	supuesto	3	$\perp$	$\rightarrow e$ 1, 2
2	$\neg F$	supuesto						
3	$\perp$	$\rightarrow e$ 1, 2						
4	$\neg\neg F$	$\neg i$ 2 – 3						
5	$F$	$\neg e$ $\neg 4$						

## Ley del tercio excluido (LEM)

- ▶ Ley del tercio excluido (LEM):

$$\frac{}{F \vee \neg F} \text{LEM}$$

- ▶ Derivación:

1	$\neg(F \vee \neg F)$	supuesto
2	$F$	supuesto
3	$F \vee \neg F$	$\vee i_1$ 2
4	$\perp$	$\neg e$ 1, 3
5	$\neg F$	$\neg i$ 2 – 4
6	$F \vee \neg F$	$\vee i_2$ 5
7	$\perp$	$\neg e$ 1, 6
8	$F \vee \neg F$	RAA 1 – 7

## Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- ▶ Ejemplo:  $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ :

1  $p \rightarrow q$  premisa

2  $p \vee \neg p$  LEM

3	$p$	supuesto
4	$q$	$\rightarrow e$ 1, 3
5	$\neg p \vee q$	$\vee i_2$ 4

6	$\neg p$	supuesto
7	$\neg p \vee q$	$\vee i_1$ 6

8  $\neg p \vee q$   $\vee e$  2, 3 – 5, 6 – 7

## Tema 2: Deducción natural proposicional

1. Reglas de deducción natural
2. Reglas derivadas
3. Resumen de reglas de deducción natural

## Resumen de reglas de deducción natural

	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$	$\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1 \quad \frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$
$\vee$	$\frac{F}{F \vee G} \vee i_1 \quad \frac{G}{F \vee G} \vee i_2$	$\frac{F \vee G \quad \begin{array}{ c } \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline G \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array}}{H} \vee e$
$\rightarrow$	$\frac{\begin{array}{ c } \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline G \\ \hline \end{array}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$	$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$

## Resumen de reglas de deducción natural

	Introducción	Eliminación
$\neg$	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg F} \neg i$	$\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$
$\perp$		$\frac{\perp}{F} \perp e$
$\neg\neg$		$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$
$\leftrightarrow$	$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$	$\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1 \quad \frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$

► Adecuación y completitud del cálculo de deducción natural.

## Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000).  
 Cap. 16: Cálculo deductivo.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998).
3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002).  
 Cap. 4: Cálculo deductivo. Deducibilidad.
4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000)  
 Cap. 1: Propositional logic.
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)  
 Cap. 3.6: El método de la deducción natural.