Lógica informática (2011–12)

Tema 5b: Aplicaciones de la lógica proposicional

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 5b: Aplicaciones de la lógica proposicional

1. Sobre Prover9 y Mace4
2. El problema de los veraces y los mentirosos
3. El problema de los animales
4. El problema del coloreado del pentágono
5. El problema del palomar
6. El problema de los rectángulos
7. El problema de las 4 reinas
8. El problema de Ramsey

Tema 5b: Aplicaciones de la lógica proposicional

1. Sobre Prover9 y Mace4
2. El problema de los veraces y los mentirosos
3. El problema de los animales
4. El problema del coloreado del pentágono
5. El problema del palomar
6. El problema de los rectángulos
7. El problema de las 4 reinas
8. El problema de Ramsey

Sobre Prover9 y Mace4

- Prover9 es un demostrador automático para la lógica de primer orden.
- Mace4 un calculador de modelos.
- Prover9 y Mace4 son libres y se encuentran en `http://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4`
- Sintaxis (como la de APLI2):

Usual	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
Prover9/Mace4	-	&	|	->	<->

Tema 5b: Aplicaciones de la lógica proposicional

1. Sobre Prover9 y Mace4
2. El problema de los veraces y los mentirosos
3. El problema de los animales
4. El problema del coloreado del pentágono
5. El problema del palomar
6. El problema de los rectángulos
7. El problema de las 4 reinas
8. El problema de Ramsey

El problema de mentirosos: Enunciado

- Enunciado: En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase
  - A dice "B y C son veraces syss C es veraz"
  - B dice "Si A y B son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso"
  - C dice "B es mentiroso syss A o B es veraz"

  Determinar a qué tribu pertenecen A, B y C.
- Simbolización:
  - a, b y c representan que A, B y C son veraces
  - -a, -b y -c representan que A, B y C son mentirosos

El problema los mentirosos: Modelos con Mace4

- Idea: las tribus se determinan a partir de los modelos del conjunto de fórmulas correspondientes a las tres frases.
- Representación en Mace4 (`pb_mentirosos.in`)

```
formulas(assumptions).
 a <-> (b & c <-> c).
 b <-> (a & c -> b & c & -a).
 c <-> (-b <-> a | b).
end_of_list.
```

El problema de los mentirosos: Modelos con Mace4

- Cálculo de modelos con Mace4

```
> mace4 -N2 -m9 -p1 <pb_mentirosos.in
 a : 1
 b : 1
 c : 0
```

- Conclusión: A y B son veraces y C es mentiroso.

El problema de los mentirosos: Demostración con Prover9

- Representación en Prover9 (`pb_mentirosos_2.in`)

```
formulas(assumptions).
 a <-> (b & c <-> c).
 b <-> (a & c -> b & c & -a).
 c <-> (-b <-> a | b).
end_of_list.

formulas(goals).
 a & b & -c.
end_of_list.
```

El problema de los mentirosos: Demostración con Prover9

- Demostración con Prover9:

```
> prover9 <pb_mentirosos_2.in >pb_mentirosos_2.out
 1 a <-> (b & c <-> c).          [assumption]
 2 b <-> (a & c -> b & c & -a). [assumption]
 3 c <-> (-b <-> a | b).         [assumption].
 4 a & b & -c.                   [goal].
 5 -a | b | -c.  [clausify(1)].
 6 a | c.        [clausify(1)].
 9 b | a.        [clausify(2)].
10 b | c.        [clausify(2)].
11 -c | -b.      [clausify(3)].
12 -a | -b | c.  [deny(4)].
13 b | -a.       [10,5]
14 -b | a.       [11,6].
15 a.            [14,9].
16 b.            [13,15].
17 c.            [12,15,16].
18 $F.           [11,17,16].
============================== end of proof ==========================
THEOREM PROVED
```

Tema 5b: Aplicaciones de la lógica proposicional

1. Sobre Prover9 y Mace4
2. El problema de los veraces y los mentirosos
3. El problema de los animales
4. El problema del coloreado del pentágono
5. El problema del palomar
6. El problema de los rectángulos
7. El problema de las 4 reinas
8. El problema de Ramsey

El problema de los animales

- Enunciado: Disponemos de una base de conocimiento compuesta de reglas sobre clasificación de animales y hechos sobre características de un animal.
  - Regla 1: Si un animal es ungulado y tiene rayas negras, entonces es una cebra.
  - Regla 2: Si un animal rumia y es mamífero, entonces es ungulado.
  - Regla 3: Si un animal es mamífero y tiene pezuñas, entonces es ungulado.
  - Hecho 1: El animal tiene es mamífero.
  - Hecho 2: El animal tiene pezuñas.
  - Hecho 3: El animal tiene rayas negras.

  Demostrar a partir de la base de conocimientos que el animal es una cebra.

El problema de los animales

- Representación en Prover9 (`pb_animales.in`)

```
formulas(assumptions).
 es_ungulado & tiene_rayas_negras -> es_cebra.
 rumia & es_mamifero -> es_ungulado.
 es_mamifero & tiene_pezugnas -> es_ungulado.
 es_mamifero.
 tiene_pezugnas.
 tiene_rayas_negras.
end_of_list.

formulas(goals).
 es_cebra.
end_of_list.
```

El problema de los animales

- Demostración con Prover9:

```
> prover9 <pb_animales.in
============================== PROOF =================================
 1 es_ungulado & tiene_rayas_negras -> es_cebra.  [assumption].
 3 es_mamifero & tiene_pezugnas -> es_ungulado.   [assumption].
 4 es_cebra # label(non_clause).                  [goal].
 5 -es_ungulado | -tiene_rayas_negras | es_cebra. [clausify(1)].
 7 -es_mamifero | -tiene_pezugnas | es_ungulado.  [clausify(3)].
 8 es_mamifero.                                   [assumption].
 9 tiene_pezugnas.                                [assumption].
10 tiene_rayas_negras.                            [assumption].
11 -es_cebra.                                     [deny(4)].
12 es_ungulado.                                   [7,8,9].
14 -es_ungulado.                                  [5,10,11].
15 $F.                                            [14,12].
============================== end of proof ==========================
THEOREM PROVED
```

El problema de los animales

- Confirmación con Mace4:

```
> mace4 -N2 <pb_animales.in
formulas(mace4_clauses).
-es_ungulado | -tiene_rayas_negras | es_cebra.
-rumia | -es_mamifero | es_ungulado.
-es_mamifero | -tiene_pezugnas | es_ungulado.
es_mamifero.
tiene_pezugnas.
tiene_rayas_negras.
-es_cebra.
end_of_list.

Exiting with failure.

------ process 5818 exit (exhausted) ------
```

Tema 5b: Aplicaciones de la lógica proposicional

1. Sobre Prover9 y Mace4
2. El problema de los veraces y los mentirosos
3. El problema de los animales
4. El problema del coloreado del pentágono
5. El problema del palomar
6. El problema de los rectángulos
7. El problema de las 4 reinas
8. El problema de Ramsey

El problema del coloreado del pentágono (con dos colores)

- Enunciado: Decidir si es posible colorear los vértices de un pentágono de rojo o azul de forma que los vértices adyacentes tengan colores distintos.
- Simbolización:
  - 1, 2, 3, 4, 5 representan los vértices consecutivos del pentágono
  - `ri` $(1 \leq i \leq 5)$ representa que el vértice `i` es rojo
  - `ai` $(1 \leq i \leq 5)$ representa que el vértice `i` es azul

El problema del coloreado del pentágono (con 2 colores)

- Representación en Mace4 (`pb_pentagono_2.in`)

```
formulas(assumptions).
 % El vértice i (1 <= i <= 5) es azul o rojo:
 a1 | r1.  a2 | r2. a3 | r3.  a4 | r4. a5 | r5.

 % Dos vértices adyacentes no pueden ser azules:
 -(a1 & a2). -(a2 & a3). -(a3 & a4).
 -(a4 & a5). -(a5 & a1).

 % Dos vértices adyacentes no pueden ser rojos:
 -(r1 & r2). -(r2 & r3). -(r3 & r4).
 -(r4 & r5). -(r5 & r1).
 end_of_list.
```

El problema del coloreado del pentágono (con 2 colores)

- Cálculo de modelos con Mace4:

```
> mace4 -N2 <pb_pentagono_2.in
Exiting with failure.
------ process 6292 exit (exhausted) ------
```

- Conclusión: Mace4 no ha encontrado ningún modelo. Luego, es imposible colorear los vértices de un pentágono de rojo o azul de forma que los vértices adyacentes tengan colores distintos.

El problema del coloreado del pentágono (con tres colores)

- Enunciado: Decidir si es posible colorear los vértices de un pentágono de rojo, azul o negro de forma que los vértices adyacentes tengan colores distintos.
- Representación en Mace4 (`pb_pentagono_3.in`)

```
formulas(assumptions).
 % El vértice i (1 <= i <= 5) es azul, rojo o negro:
 a1 | r1 | n1. a2 | r2 | n2. a3 | r3 | n3.
 a4 | r4 | n4. a5 | r5 | n5.

 % Dos vértices adyacentes no pueden ser azules:
 -(a1 & a2). -(a2 & a3). -(a3 & a4).
 -(a4 & a5). -(a5 & a1).
```

El problema del coloreado del pentágono (con tres colores)

- Representación en Mace4 (cont.)

```
 % Dos vértices adyacentes no pueden ser rojos:
 -(r1 & r2). -(r2 & r3). -(r3 & r4).
 -(r4 & r5). -(r5 & r1).

 % Dos vértices adyacentes no pueden ser negros:
 -(n1 & n2). -(n2 & n3). -(n3 & n4).
 -(n4 & n5). -(n5 & n1).
end_of_list.
```

El problema del coloreado del pentágono (con tres colores)

- Cálculo de modelo con Mace4:

```
> mace4 -N2 -p1 <pb_pentagono_3.in
 a1 : 0
 a2 : 0
 a3 : 0
 a4 : 0
 a5 : 1
 n1 : 0
 n2 : 1
 n3 : 0
 n4 : 1
 n5 : 0
 r1 : 1
 r2 : 0
 r3 : 1
 r4 : 0
 r5 : 0
```

- Conclusión: colorear el vértice 1 de rojo, el 2 de negro, el 3 de rojo, el 4 de negro y el 5 de azul.

Tema 5b: Aplicaciones de la lógica proposicional

1. Sobre Prover9 y Mace4
2. El problema de los veraces y los mentirosos
3. El problema de los animales
4. El problema del coloreado del pentágono
5. El problema del palomar
6. El problema de los rectángulos
7. El problema de las 4 reinas
8. El problema de Ramsey

El problema del palomar

- Enunciado: Cuatro palomas comparten tres huecos. Decidir si es posible que no haya dos palomas en el mismo hueco.
- Simbolización: `pihj` ($i \in \{1,2,3,4\}$ y $j \in \{1,2,3\}$) representa que la paloma `i` está en el hueco `j`.

El problema del palomar

- Representación en Mace4 (`pb_palomar.in`):

```
formulas(assumptions).
 % La paloma 1 está en alguna hueco:
 p1h1 | p1h2 | p1h3.

 % La paloma 2 está en alguna hueco:
 p2h1 | p2h2 | p2h3.

 % La paloma 3 está en alguna hueco:
 p3h1 | p3h2 | p3h3.

 % La paloma 4 está en alguna hueco:
 p4h1 | p4h2 | p4h3.
```

El problema del palomar

- Representación en Mace4 (cont.)

```
 % No hay dos palomas en la hueco 1:
 -p1h1 | -p2h1. -p1h1 | -p3h1. -p1h1 | -p4h1.
 -p2h1 | -p3h1. -p2h1 | -p4h1. -p3h1 | -p4h1.

 % No hay dos palomas en la hueco 2:
 -p1h2 | -p2h2. -p1h2 | -p3h2. -p1h2 | -p4h2.
 -p2h2 | -p3h2. -p2h2 | -p4h2. -p3h2 | -p4h2.

 % No hay dos palomas en la hueco 3:
 -p1h3 | -p2h3. -p1h3 | -p3h3. -p1h3 | -p4h3.
 -p2h3 | -p3h3. -p2h3 | -p4h3. -p3h3 | -p4h3.
end_of_list.
```

El problema del palomar

- Cálculo de modelo con Mace4:

```
> mace4 -N2 <pb_palomar.in
Exiting with failure.
------ process 6598 exit (exhausted) ------
```

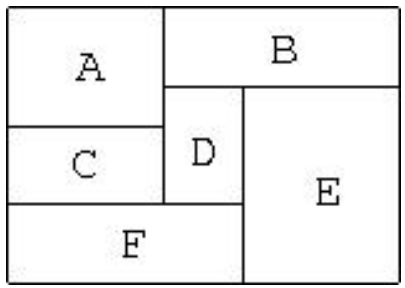
- Conclusión: Mace4 no ha encontrado ningún modelo. Luego, es imposible que no haya dos palomas en el mismo hueco.

Tema 5b: Aplicaciones de la lógica proposicional

1. Sobre Prover9 y Mace4
2. El problema de los veraces y los mentirosos
3. El problema de los animales
4. El problema del coloreado del pentágono
5. El problema del palomar
6. El problema de los rectángulos
7. El problema de las 4 reinas
8. El problema de Ramsey

El problema de los rectángulos

- Enunciado: Un rectángulo se divide en seis rectángulos menores como se indica en la figura. Demostrar que si cada una de los rectángulos menores tiene un lado cuya medida es un número entero, entonces la medida de alguno de los lados del rectángulo mayor es un número entero.



- Simbolización:
  - `base`: la base del rectángulo mayor es un número entero
  - `altura`: la altura del rectángulo mayor es un número entero
  - `base_x`: la base del rectángulo X es un número entero
  - `altura_x`: la altura del rectángulo X es un número entero

El problema de los rectángulos

- Representación en Prover9 (`pb_rectangulos.in`)

```
formulas(assumptions).
 base_a | altura_a. base_b | altura_b. base_c | altura_c.
 base_d | altura_d. base_e | altura_e. base_f | altura_f.
 base_a <-> base_c.
 base_a & base_d -> base_f.
 base_d & base_e -> base_b.
 base_a & base_b -> base.
 altura_d & altura_f -> altura_e.
 altura_a & altura_c & altura_f -> altura.
 altura_b & altura_d & altura_f -> altura.
 altura_b & altura_e -> altura.
end_of_list.
```

El problema de los rectángulos

- Representación en Prover9 (cont.)

```
formulas(goals).
 base | altura.
end_of_list.
```

- Demostración con Prover9:

```
> prover9 <pb_rectangulos.in
THEOREM PROVED
```

Tema 5b: Aplicaciones de la lógica proposicional

1. Sobre Prover9 y Mace4
2. El problema de los veraces y los mentirosos
3. El problema de los animales
4. El problema del coloreado del pentágono
5. El problema del palomar
6. El problema de los rectángulos
7. El problema de las 4 reinas
8. El problema de Ramsey

El problema de las 4 reinas

- Enunciado: Calcular las formas de colocar 4 reinas en un tablero de 4x4 de forma que no haya más de una reina en cada fila, columna o diagonal.
- Representación: `cij` ($1 \leq i, j \leq 4$) indica que hay una reina en la fila `i` columna `j`.

El problema de las 4 reinas

- Representación en Mace4 (`pb_4_reinas.in`)

```
formulas(assumptions).
% En cada fila hay una reina:
c11 | c12 | c13 | c14.
c21 | c22 | c23 | c24.
c31 | c32 | c33 | c34.
c41 | c42 | c43 | c44.
```

El problema de las 4 reinas

- Representación en Mace4 (cont.)

```
% Si en una casilla hay reina, entonces no hay más
% reinas en su fila, su columna y su diagonal:
c11 -> (-c12 & -c13 & -c14) & (-c21 & -c31 & -c41) &
       (-c22 & -c33 & -c44).
c12 -> (-c11 & -c13 & -c14) & (-c22 & -c32 & -c42) &
       (-c21 & -c23 & -c34).
c13 -> (-c11 & -c12 & -c14) & (-c23 & -c33 & -c43) &
       (-c31 & -c22 & -c24).
c14 -> (-c11 & -c12 & -c13) & (-c24 & -c34 & -c44) &
       (-c23 & -c32 & -c41).
```

El problema de las 4 reinas

- Representación en Mace4 (cont.)

```
c21 -> (-c22 & -c23 & -c24) & (-c11 & -c31 & -c41) &
       (-c32 & -c43 & -c12).
c22 -> (-c21 & -c23 & -c24) & (-c12 & -c32 & -c42) &
       (-c11 & -c33 & -c44 & -c13 & -c31).
c23 -> (-c21 & -c22 & -c24) & (-c13 & -c33 & -c43) &
       (-c12 & -c34 & -c14 & -c32 & -c41).
c24 -> (-c21 & -c22 & -c23) & (-c14 & -c34 & -c44) &
       (-c13 & -c33 & -c42).
```

El problema de las 4 reinas

- Representación en Mace4 (cont.)

```
c31 -> (-c32 & -c33 & -c34) & (-c11 & -c21 & -c41) &
       (-c42 & -c13 & -c22).
c32 -> (-c31 & -c33 & -c34) & (-c12 & -c22 & -c42) &
       (-c21 & -c43 & -c14 & -c23 & -c41).
c33 -> (-c31 & -c32 & -c34) & (-c13 & -c23 & -c43) &
       (-c11 & -c22 & -c44 & -c24 & -c42).
c34 -> (-c31 & -c32 & -c33) & (-c14 & -c24 & -c44) &
       (-c12 & -c23 & -c43).
```

El problema de las 4 reinas

- Representación en Mace4 (cont.)

```
c41 -> (-c42 & -c43 & -c44) & (-c11 & -c21 & -c31) &
       (-c14 & -c23 & -c32).
c42 -> (-c41 & -c43 & -c44) & (-c12 & -c22 & -c32) &
       (-c31 & -c24 & -c33).
c43 -> (-c41 & -c42 & -c44) & (-c13 & -c23 & -c33) &
       (-c21 & -c32 & -c34).
c44 -> (-c41 & -c42 & -c43) & (-c14 & -c24 & -c34) &
       (-c11 & -c22 & -c33).
end_of_list.
```

El problema de las 4 reinas

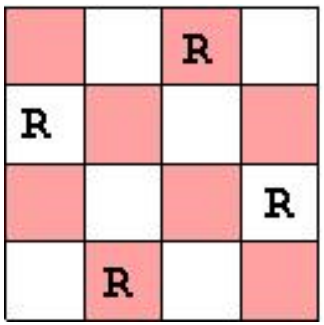
- Búsqueda de modelos con Mace4:

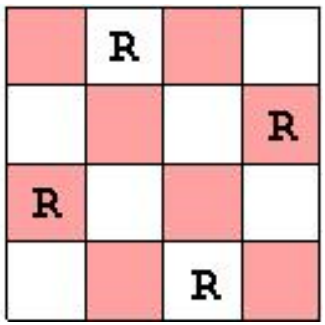
```
> mace4 -N2 -m9 -p1 <pb_4_reinas.in
 c11 : 0  c12 : 0  c13 : 1  c14 : 0
 c21 : 1  c22 : 0  c23 : 0  c24 : 0
 c31 : 0  c32 : 0  c33 : 0  c34 : 1
 c41 : 0  c42 : 1  c43 : 0  c44 : 0

 c11 : 0  c12 : 1  c13 : 0  c14 : 0
 c21 : 0  c22 : 0  c23 : 0  c24 : 1
 c31 : 1  c32 : 0  c33 : 0  c34 : 0
 c41 : 0  c42 : 0  c43 : 1  c44 : 0
```

El problema de las 4 reinas

- Conclusión: Gráficamente los modelos son





Tema 5b: Aplicaciones de la lógica proposicional

1. Sobre Prover9 y Mace4
2. El problema de los veraces y los mentirosos
3. El problema de los animales
4. El problema del coloreado del pentágono
5. El problema del palomar
6. El problema de los rectángulos
7. El problema de las 4 reinas
8. El problema de Ramsey

El problema de Ramsey

- Enunciado: Probar el caso más simple del teorema de Ramsey: entre seis personas siempre hay (al menos) tres tales que cada una conoce a las otras dos o cada una no conoce a ninguna de las otras dos.
- Simbolización:
  - 1,2,3,4,5,6 representan a las personas
  - `pij` ($1 \leq i < j \leq 6$) indica que las personas `i` y `j` se conocen.

El problema de Ramsey

- Representación en Prover9 (`pb_ramsey.in`)

```
formulas(goals).
 % Hay 3 personas que se conocen entre ellas:
 (p12 & p13 & p23) | (p12 & p14 & p24) |
 (p12 & p15 & p25) | (p12 & p16 & p26) |
 (p13 & p14 & p34) | (p13 & p15 & p35) |
 (p13 & p16 & p36) | (p14 & p15 & p45) |
 (p14 & p16 & p46) | (p15 & p16 & p56) |
 (p23 & p24 & p34) | (p23 & p25 & p35) |
 (p23 & p26 & p36) | (p24 & p25 & p45) |
 (p24 & p26 & p46) | (p25 & p26 & p56) |
 (p34 & p35 & p45) | (p34 & p36 & p46) |
 (p35 & p36 & p56) | (p45 & p46 & p56) |
```

El problema de Ramsey

- Representación en Prover9 (cont.)

```
% Hay 3 personas que que se desconocen:
(-p12 & -p13 & -p23) | (-p12 & -p14 & -p24) |
(-p12 & -p15 & -p25) | (-p12 & -p16 & -p26) |
(-p13 & -p14 & -p34) | (-p13 & -p15 & -p35) |
(-p13 & -p16 & -p36) | (-p14 & -p15 & -p45) |
(-p14 & -p16 & -p46) | (-p15 & -p16 & -p56) |
(-p23 & -p24 & -p34) | (-p23 & -p25 & -p35) |
(-p23 & -p26 & -p36) | (-p24 & -p25 & -p45) |
(-p24 & -p26 & -p46) | (-p25 & -p26 & -p56) |
(-p34 & -p35 & -p45) | (-p34 & -p36 & -p46) |
(-p35 & -p36 & -p56) | (-p45 & -p46 & -p56).
end_of_list.
```

El problema de Ramsey

- Demostración con Prover9:

```
> prover9 <pb_ramsey.in
THEOREM PROVED
```

Bibliografía

- Alonso, J.A. Razonamiento proposicional con Otter y Mace
- Alonso, J.A. y Borrego, J. *Deducción automática (Vol. 1: Construcción lógica de sistemas lógicos)* (Ed. Kronos, 2002)
  - Cap. 3: Elementos de lógica proposicional
- Ben–Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)
  - Cap. 2: Propositional Calculus: Formulas, Models, Tableaux
- Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)
- Nerode,A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)