
Ejercicio 1 [2 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*
$(p \to q) \lor (p \to r) \to (p \to (q \land r))$
es una tautología y, a partir del tablero, calcular una forma normal conjuntiva de la fórmula.

Solución:

El problema se reduce a decidir si $\{\neg((p \to q) \lor (p \to r) \to (p \to q \land r))\}$ es inconsistente.

1. $\neg((p \to q) \lor (p \to r) \to (p \to q \land r))$
2. $(p \to q) \lor (p \to r)$ (1)
3. $\neg(p \to q \land r)$ (1)
4. p (3)
5. $\neg(q \land r)$ (3)

- 6. $\neg q$ (5)
  - 8. $p \to q$ (2)
    - 10. $\neg p$ (8) Cerrada 4 y 10
    - 11. q (8) Cerrada 6 y 11
  - 9. $p \to r$ (2)
    - 12. $\neg p$ (9) Cerrada 9 y 4
    - 13. r (9) Abierta $[p, \neg q, r]$
- 7. $\neg r$ (5)
  - 14. $p \to q$ (2)
    - 16. $\neg p$ (8) Cerrada 4 y 16
    - 17. q (8) Abierta $[p, q, \neg r]$
  - 15. $p \to r$ (2)
    - 17. $\neg p$ (9) Cerrada 17 y 4
    - 18. r (9) Cerrada 18 y 7

Por tanto, $(p \to q) \lor (p \to r) \to (p \to (q \land r))$ no es una tautología.

Para calcular una forma normal conjuntiva de la fórmula dada, F, se observa que

$$\neg F \equiv (p \land \neg q \land r) \lor (p \land q \land \neg r)$$

Por tanto,

$$F \equiv (\neg p \lor q \lor \neg r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r)$$

y

$$(\neg p \lor q \lor \neg r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r)$$

es una forma normal conjuntiva de F,

Ejercicio 2 [2 puntos] *Decidir por resolución si la la fórmula* $\exists x(P(x,a) \land P(f(x),b))$ *es consecuencia del conjunto de fórmulas*

$$\begin{aligned} S = \{ \; & \forall x(P(a,x) \to P(b,f(x))), \\ & \forall x(P(f(x),x) \to (\forall z P(z,b))), \\ & P(a,f(a)) \land P(f(b),b)\} \end{aligned}$$

En el caso de que no lo sea, construir a partir de la resolución un modelo de Herbrand de S que no sea modelo de la fórmula.

Solución:

Las formas clausales de las fórmulas del problema son:

- de $(\forall x)[P(a,x) \rightarrow P(b, f(x))]$, $S_1 = \{\{\neg P(a,x), P(b, f(x))\}\}$;
- de $(\forall x)[P(f(x),x) \rightarrow (\forall z)P(z,b)]$, $S_2 = \{\{\neg P(f(x),x), P(z,b)\}\}$;
- de $P(a, f(a)) \wedge P(f(b),b)$, $S_3 = \{\{P(a, f(a))\}, \{P(f(b),b)\}\}$;
- de $\neg(\exists x)[P(x,a) \wedge P(f(x),b)$, $S_4 = \{\{\neg P(x,a), \neg P(f(x),b)\}\}$.

Vamos a calcular la saturación, por resolución y factorización, de $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Las cláusulas iniciales son

1 $\{\neg P(a,x), P(b, f(x))\}$
2 $\{\neg P(f(x),x), P(z,b)\}$
3 $\{P(a, f(a))\}$
4 $\{P(f(b),b)\}$
5 $\{\neg P(x,a), \neg P(f(x),b)\}$

Al resolver 3 con 3 no se obtiene resolvente.
Al resolver 4 con 3 y 4 no se obtiene resolvente.
Al resolver 1 con 3, 4 y 1 se obtiene
6 $\{P(b, f(f(a)))\}$ (resolvente de 1 y 3).
Al resolver 6 con 3, 4, 1 y 6 no se obtiene resolvente.
Al resolver 2 con 3, 4, 1, 6 y 2 se obtiene
7 $\{P(z,b)\}$ (resolvente de 2 y 4) y
8 $\{-P(f(x),x), P(b, f(b))\}$ (resolvente de 2 y 1).
La cláusula 7 subsume a la 2 y a la 4.
Al resolver 7 con 3, 1, 6 y 7 se obtiene
9 $\{P(b, f(b))\}$ (resolvente de 7 y 1)
La cláusula 9 subsume a la 8
Al resolver 9 con 3, 1, 6, 7 y 9 no se obtiene resolventes.
Al resolver 5 con 3, 1, 6, 7, 9 y 5 se obtiene
10 $\{\neg P(x,a)\}$ (resolvente de 5 y 7) *La cláusula 10 subsume a la 5*

Por tanto, el saturado es

1 $\{\neg P(a,x), P(b, f(x))\}$
3 $\{P(a, f(a))\}$
6 $\{P(b, f(f(a)))\}$
7 $\{P(z,b)\}$
9 $\{P(b, f(b))\}$
10 $\{\neg P(x,a)\}$

El universo de Herbrand es $UH = \{a, f(a), f(f(a)), \dots, b, f(b), f(f(b)), \dots\}$ y un modelo de Herbrand es $I = \{P(a, f(a)), P(b, f(f(a))), P(b, f(b)), P(z,b) : z \in UH\}$

Ejercicio 3 [2 puntos] *Formalizar las siguiente sentencias utilizando el símbolo de relación $P(x)$ para representar que x es un planeta:*

1. *Hay como máximo un planeta.*
2. *Hay exactamente un planeta.*
3. *Hay al menos dos planetas.*
4. *Hay a lo sumo dos planetas,*
5. *Hay exactamente dos planetas.*

Solución:

1. Hay como máximo un planeta.
   $\forall x \forall y (P(x) \land P(y) \to x = y)$
2. Hay exactamente un planeta.
   $\exists x (P(x) \land \forall y (P(y) \to x = y))$
3. Hay al menos dos planetas.
   $\exists x \exists y (P(x) \land P(y) \land x \neq y)$
4. Hay a lo sumo dos planetas,
   $\forall x \forall y \forall z (P(x) \land P(y) \land P(z) \to (x = y \lor x = z \lor y = z))$
5. Hay exactamente dos planetas.
   $\exists x \exists y (P(x) \land P(y) \land x \neq y \land \forall z (P(z) \to z = x \lor z = y))$

Ejercicio 4 [2 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes sentencias:*

1. *Existe un conjunto finito de cláusulas S que es inconsistente y tiene un conjunto infinito de resolventes; es decir, existe una sucesión infinita de cláusulas $C_1, C_2, \dots$ tal que para todo i se tiene que $C_i \in S$ o existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k.*
2. *Todo conjunto inconsistente de cláusula tiene una refutación por resolución positiva.*

Ejercicio 5 [2 puntos] *Decidir por deducción natural si la fórmula $\forall x I(x)$ es consecuencia lógica del conjunto formado por las siguientes fórmulas:*

- $\forall x (F(x) \lor G(x) \to \neg H(x))$.
- $\forall x ((G(x) \to \neg I(x)) \to (F(x) \land H(x)))$.
