Lógica informática (2012–13)

Tema 7: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 7: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

Tema 7: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

1. Representación del conocimiento en lógica de primer orden
    - Representación de conocimiento geográfico
    - Representación del mundo de los bloques
    - Representación de conocimiento astronómico

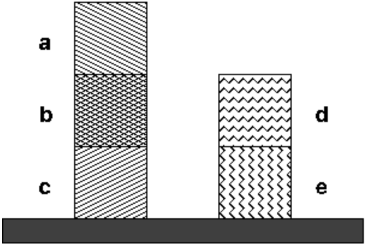
2. Sintaxis de la lógica de primer orden

3. Semántica de la lógica de primer orden

Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Ejemplo 1: *Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla*
  - Representación en lógica proposicional:
    $\{SvC \to CvS, \quad SvC\} \models CvS$
- Ejemplo 2: *Si una ciudad es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla*
  - Representación en lógica proposicional: Imposible
  - Representación en lógica de primer orden:
    $\{\forall x\, \forall y\, [vecina(x, y) \to vecina(y, x)], \quad vecina(Sevilla, Cadiz)\}$
    $\models vecina(Cadiz, Sevilla)$

Representación del mundo de los bloques



- Simbolización:
  - sobre(x, y) se verifica si el bloque x está colocado sobre el bloque y
  - sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa
- Situación del ejemplo:
  sobre(a, b), sobre(b, c), sobre_mesa(c), sobre(d, e), sobre_mesa(e)

Representación del mundo de los bloques

- Definiciones:
  - bajo(x, y) se verifica si el bloque x está debajo del bloque y
    $\forall x\ \forall y\ [\text{bajo}(x, y) \leftrightarrow \text{sobre}(y, x)]$
  - encima(x, y) se verifica si el bloque x está encima del bloque y pudiendo haber otros bloques entre ellos
    $$\forall x\ \forall y\ [\ \text{encima}(x, y) \leftrightarrow \text{sobre}(x, y) \lor \exists z\ [\text{sobre}(x, z) \land \text{encima}(z, y)]]$$
  - libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
    $\forall x\ [\text{libre}(x) \leftrightarrow \neg\exists y\ \ \text{sobre}(y, x)]$
  - pila(x, y, z) se verifica si el bloque x está sobre el y, el y sobre el z y el z sobre la mesa
    $$\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\ \text{pila}(x, y, z) \leftrightarrow \text{sobre}(x, y) \land \text{sobre}(y, z) \land \text{sobre\_mesa}(z)]$$
- Propiedades:
  - Si z, y, z es una pila entonces y no está libre
    $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\text{pila}(x, y, z) \rightarrow \neg\,\text{libre}(y)]$

Representación del mundo de los bloques con funciones e igualdad

- Simbolización:
  - es_bloque(x) se verifica si x es un bloque.
  - superior(x) es el bloque que está sobre el bloque x.
- Situación del ejemplo:
  - es_bloque(a), es_bloque(b), es_bloque(c), es_bloque(d), es_bloque(e)
  - $\text{superior}(b) = a, \text{superior}(c) = b, \text{superior}(e) = d$
- Definiciones:
  - sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa
    $\forall x\ [\text{sobre\_mesa}(x) \leftrightarrow \text{es\_bloque}(x) \land \neg\exists y\ \text{superior}(y) = x]$
  - libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
    $\forall x\ [\text{libre}(x) \leftrightarrow \neg\exists y\ \text{superior}(x) = y]$
  - tope(x) es el bloque libre que está encima de x
    $$\forall x\ [\ (\text{libre}(x) \rightarrow \text{tope}(x) = x) \land \\ (\neg\,\text{libre}(x) \rightarrow \text{tope}(x) = \text{tope}(\text{superior}(x)))]$$

Representación de conocimiento astronómico

- *La Tierra es un planeta:*
  $\text{planeta}(\text{Tierra})$
- *La Luna no es un planeta:*
  $\neg\,\text{planeta}(\text{Luna})$
- *La Luna es un satélite:*
  $\text{satélite}(\text{Luna})$
- *La Tierra gira alrededor del Sol:*
  $\text{gira}(\text{Tierra}, \text{Sol})$
- *Todo planeta es un satélite:*
  $\forall x\ [\text{planeta}(x) \to \text{satélite}(x)]$
- *Todo planeta gira alrededor del Sol:*
  $\forall x\ [\text{planeta}(x) \to \text{gira}(x, \text{Sol})]$
- *Algún planeta gira alrededor de la Luna:*
  $\exists x\ [\text{planeta}(x) \land \text{gira}(x, \text{Luna})]$

Representación de conocimiento astronómico

- *Hay por lo menos un satélite:*
  $\exists x \text{ satélite}(x)$
- *Ningún planeta es un satélite:*
  $\neg\exists x\ [\text{planeta}(x) \land \text{satélite}(x)]$
- *Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:*
  $\neg\exists x\ \ \text{gira}(x, x)$
- *Alrededor de los satélites no giran objetos:*
  $\forall x\ [\text{satélite}(x) \to \neg\exists y\ \ \text{gira}(y, x)]$
- *Hay exactamente un satélite:*
  $\exists x\ [\text{satélite}(x) \land \forall y\ [\text{satélite}(y) \to x = y]]$
- *La Luna es un satélite de la Tierra:*
  $\text{satélite}(\text{Luna}, \text{Tierra})$
- *Todo planeta tiene un satélite:*
  $\forall x\ [\text{planeta}(x) \to \exists y\ \text{satélite}(y, x)]$

Representación de conocimiento astronómico

- *La Tierra no tiene satélites:*
  $\neg\exists x \ \text{satélite}(x, \text{Tierra})$
- *Algún planeta no tiene satélites:*
  $\exists x \ [\text{planeta}(x) \land \neg\exists y \ \text{satélite}(y, x)]$
- *Sólo los planetas tienen satélites:*
  $\forall x \ [\exists y \ \text{satélite}(y, x) \to \text{planeta}(x)]$
- *Todo satélite es satélite de algún planeta:*
  $\forall x \ [\text{satélite}(x) \to \exists y \ (\text{planeta}(y) \land \text{satélite}(x, y))]$
- *La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes:*
  $$\begin{aligned} \neg\exists x \ \exists y \ [\ & \text{planeta}(x) \land \text{planeta}(y) \land \\ & \text{gira}(\text{Luna}, x) \land \text{gira}(\text{Luna}, y) \land x \neq y] \end{aligned}$$
- *Hay exactamente dos planetas:*
  $$\begin{aligned} \exists x \ \exists y \ [\ & \text{planeta}(x) \land \text{planeta}(y) \land x \neq y \land \\ & \forall z \ [\text{planeta}(z) \to z = x \lor z = y]] \end{aligned}$$

Tema 7: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

Lenguaje de primer orden

- Símbolos lógicos:
  - Variables: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$.
  - Conectivas: $\neg, \land, \lor, \to, \leftrightarrow$.
  - Cuantificadores: $\forall, \exists$.
  - Símbolo de igualdad: $=$.
- Símbolos propios:
  - Símbolos de constantes: $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$.
  - Símbolos de predicado (con aridad): $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$.
  - Símbolos de función (con aridad): $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$.
- Símbolos auxiliares: "(", ")", ",".
- Notación:
  - $L, L_1, L_2, \dots$ representan lenguajes de primer orden.
  - Var representa el conjunto de las variables.
- Los símbolos de predicados de aridad mayor que 1 se llaman de relaciones.

Ejemplos de lenguajes de primer orden

- Lenguaje del mundo de los bloques:
  - Símbolos de constantes: a, b, c, d, e
  - Símbolos de predicado (y de relación):
    - de aridad 1: $\text{sobre\_mesa}, \text{libre}, \text{es\_bloque}$
    - de aridad 2: $\text{sobre}, \text{bajo}, \text{encima}$
    - de aridad 3: pila
  - Símbolos de función (de aridad 1): $\text{superior}, \text{tope}$
- Lenguaje de la aritmética:
  - Símbolos de constantes: $0, 1$
  - Símbolos de función:
    - monaria: s (siguiente)
    - binarias: $+, \cdot$
  - Símbolo de predicado binario: $<$

Términos

- Def. de término de un lenguaje de primer orden L:
  - Las variables son términos de L.
  - Las constantes de L son términos de L.
  - Si f es un símbolo de función n–aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $+(\cdot(x, 1), s(y))$ es un término, que se suele escribir como $(x \cdot 1) + s(y)$
    - $+(\cdot(x, <), s(y))$ no es un término
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - superior(superior(c)) es un término.
    - libre(superior(c)) no es un término.
- Notación:
  - $s, t, t_1, t_2, \dots$ representan términos.
  - $\text{Térm}(L)$ representa el conjunto de los términos de L

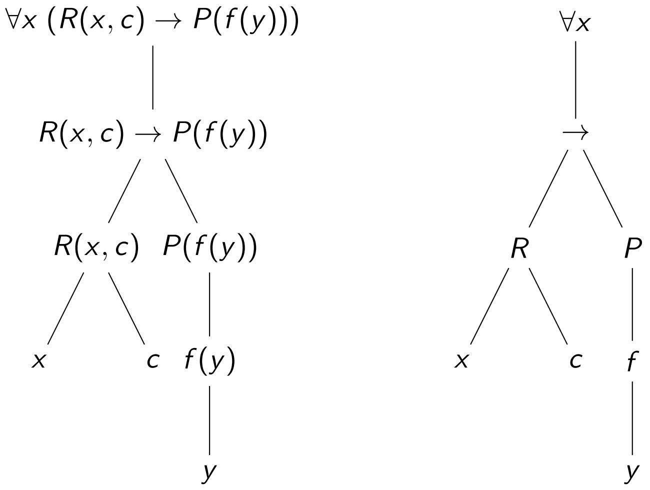
Fórmulas atómicas

- Def. de fórmula atómica de un lenguaje de primer orden L:
  - Si t_1 y t_2 son términos de L, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica de L.
  - Si P es un símbolo de relación n–aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $< (\cdot(x, 1), s(y))$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x \cdot 1 < s(y)$
    - $+(x, y) = \cdot(x, y)$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x + y = x \cdot y$
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - libre(superior(c)) es una fórmula atómica.
    - tope(c) = superior(b) es una fórmula atómica.
- Notación:
  - $A, B, A_1, A_2, \dots$ representan fórmulas atómicas.
  - Atóm(L) representa el conjunto de las fórmulas atómicas de L.

Fórmulas

- Definición de las fórmulas de L:
  - Las fórmulas atómicas de L son fórmulas de L.
  - Si F y G son fórmulas de L, entonces $\neg F$, $(F \land G)$, $(F \lor G)$, $(F \to G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas de L.
  - Si F es una fórmula de L, entonces $\forall x\ F$ y $\exists x\ F$ son fórmulas de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $\forall x\ \exists y\ <(x, y)$ es una fórmula que se escribe como $\forall x\ \exists y\ x < y$
    - $\forall x\ \exists y\ +(x, y)$ no es una fórmula.
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - $\forall x\ (\text{tope}(x) = x \leftrightarrow \text{libre}(x))$ es una fórmula.
- Notación:
  - $F, G, H, F_1, F_2, \dots$ representan fórmulas.
  - $\text{Fórm}(L)$ representa el conjunto de las fórmulas de L.

Árboles de análisis (o de formación)



Subfórmulas

- Def: El conjunto $\text{Subf}(F)$ de las subfórmulas de una fórmula F se define recursivamente por:

  $$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una fórmula atómica;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F = G * H; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \forall x\ G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \exists x\ G \end{cases}$$

- Ejemplo:

  $$\begin{aligned} \text{Subf}(\forall x\ (R(x,c) \to P(f(y)))) = \{\ & \forall x\ (R(x,c) \to P(f(y))), \\ & (R(x,c) \to P(f(y))), \\ & R(x,c), \\ & P(f(y))\} \end{aligned}$$

Criterios de reducción de paréntesis

- Pueden eliminarse los paréntesis externos.
  $F \wedge G$ es una abreviatura de $(F \wedge G)$
- Precedencia de asociación de conectivas y cuantificadores: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
  $\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$ es una abreviatura de $(\forall x\ P(x)) \rightarrow Q(x)$
- Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.
  $F \vee G \vee H$ es una abreviatura de $(F \vee (G \vee H))$
  $F \wedge G \wedge H \rightarrow \neg F \vee G$ es una abreviatura de $((F \wedge (G \wedge H)) \rightarrow$
- Los símbolos binarios pueden escribirse en notación infija.
  $x + y$ es una abreviatura de $+(x, y)$
  $x < y$ es una abreviatura de $< (x, y)$

Conjuntos de variables

- Def.: El conjunto de las variables del término t es

$$\mathrm{V}(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } t \text{ es una constante;} \\ \{x\}, & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \dots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Def.: El conjunto de las variables de la fórmula F es

$$\mathrm{V}(F) = \begin{cases} \mathrm{V}(t_1) \cup \mathrm{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \dots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ \mathrm{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathrm{V}(G) \cup \mathrm{V}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathrm{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \forall x\ G; \\ \mathrm{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \exists x\ G \end{cases}$$

- Ejemplos:
  - El conjunto de las variables de $\forall x\ (R(x, c) \to P(f(y)))$ es $\{x, y\}$.
  - El conjunto de las variables de $\forall x\ (R(a, c) \to P(f(y)))$ es $\{y\}$.

Apariciones libres y ligadas

- Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es ligada si es en una subfórmula de F de la forma $\forall x\ G$ ó $\exists x\ G$.
- Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es libre si no es ligada.
- Ejemplo: Las apariciones ligadas son las subrayadas:
  $\forall x\ (P(\underline{x}) \to R(\underline{x}, y)) \to (\exists y\ P(\underline{y}) \to R(z, x))$
  $\exists x\ R(\underline{x}, y) \lor \forall y\ P(\underline{y})$
  $\forall x\ (P(\underline{x}) \to \exists y\ R(\underline{x}, \underline{y}))$
  $P(x) \to R(x, y)$

Variables libres y ligadas

- La variable x es libre en F si tiene una aparición libre en F.
- La variable x es ligada en F si tiene una aparición ligada en F.
- El conjunto de las variables libres de una fórmula F es:

$$\mathrm{VL}(F) = \begin{cases} \mathrm{V}(t_1) \cup \mathrm{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ \mathrm{VL}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathrm{VL}(G) \cup \mathrm{VL}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathrm{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } \forall x\ G; \\ \mathrm{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } \exists x\ G \end{cases}$$

- Ejemplo:

Fórmula	Ligadas	Libres
$\forall x\ (P(x) \to R(x,y)) \to (\exists y\ P(y) \to R(x,z))$	x, y	x, y, z
$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x,y))$	x, y	
$\forall z\ (P(x) \to R(x,y))$		x, y

Fórmulas cerradas y abiertas

- Fórmula cerradas:
  - Def.: Una fórmula cerrada (o sentencia) es una fórmula sin variables libres.
  - Ejemplos: $\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x,y))$ es cerrada.
    $\exists x\ R(x,y) \lor \forall y\ P(y)$ no es cerrada.
- Fórmulas abiertas:
  - Def.: Una fórmula abierta es una fórmula con variables libres.
  - Ejemplos: $\forall x\ (P(x) \to \exists y\ R(x,y))$ no es abierta.
    $\exists x\ R(x,y) \lor \forall y\ P(y)$ es abierta.

Tema 7: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

Estructuras, asignaciones e interpretaciones

- Una estructura del lenguaje L es un par $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que:
  - U es un conjunto no vacío, denominado universo de la estructura;
  - I es una función con dominio el conjunto de símbolos propios de L tal que
    - si c es una constante de L, entonces $I(c) \in U$;
    - si f es un símbolo de función n–aria de L, entonces $I(f) : U^n \to U$;
    - si P es un símbolo de relación 0–aria de L, entonces $I(P) \in \{1, 0\}$;
    - si R es un símbolo de relación n–aria $(n > 0)$ de L, entonces $I(R) \subseteq U^n$;
- Una asignación A en una estructura (U, I) es una función $A : \text{Var} \to U$ que hace corresponder a cada variable del alfabeto un elemento del universo de la estructura.
- Una interpretación de L es un par $(\mathcal{I}, A)$ formado por una estructura $\mathcal{I}$ de L y una asignación A en $\mathcal{I}$.
- Notación: A veces se usa para los valores de verdad V y F en lugar de 1 y 0.

Ejemplos de estructuras

Sea L el lenguaje de la aritmética cuyos símbolos propios son:
constante: 0;
símbolo de función monaria: s;
símbolo de función binaria: $+$ y
símbolo de relación binaria: $\leq$

- Primera estructura de L:
  $U_1 = \mathbb{N}$
  $I_1(0) = 0$
  $I_1(s) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ (sucesor)
  $I_1(+) = \{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ (suma)
  $I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ (menor o igual)
- Segunda estructura de L:
  $U_2 = \{0, 1\}^*$ (cadenas de 0 y 1)
  $I_2(0) = \epsilon$ (cadena vacía)
  $I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0, 1\}^*\}$ (siguiente)
  $I_2(+) = \{(w_1, w_2, w_1w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*\}$ (concatenación)
  $I_2(\leq) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*, w_1 \text{ es prefijo de } w_2\}$ (prefijo)

Ejemplos de estructuras

- Tercera estructura de L:
  $U_3 = \{abierto, cerrado\}$
  $I_3(0) = cerrado$
  $I_3(s) = \{(abierto, cerrado), (cerrado, abierto)\}$
  $I_3(+) = \{ (abierto, abierto, abierto), (abierto, cerrado, abierto),$
  $(cerrado, abierto, abierto), (cerrado, cerrado, cerrado)\}$
  $I_3(\leq) = \{ (abierto, abierto), (cerrado, abierto), (cerrado, cerrado)\}$

e	$I_3(s)(e)$
$abierto$	$cerrado$
$cerrado$	$abierto$

$I_3(+)$	$abierto$	$cerrado$
$abierto$	$abierto$	$abierto$
$cerrado$	$abierto$	$cerrado$

$I_3(\leq)$	$abierto$	$cerrado$
$abierto$	1	0
$cerrado$	1	1

Ejemplo de evaluación de términos

- Sean L el lenguaje de la página 26 y t el término $s(x+s(0))$.
  - Si $\mathcal{I}$ es la primera estructura y $A(x)=3$, entonces
    $$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_A(t) & = \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) & = s^I(3 +^I s^I(0^I)) = \\ & = s^I(3 +^I s^I(0)) & = s^I(3 +^I 1) = \\ & = s^I(4) & = 5 \end{array}$$
  - Si $\mathcal{I}$ es la segunda estructura y $A(x)=10$, entonces
    $$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_A(t) & = \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) & = s^I(10 +^I s^I(0^I)) = \\ & = s^I(10 +^I s^I(\epsilon)) & = s^I(10 +^I 1) = \\ & = s^I(101) & = 1011 \end{array}$$
  - Si $\mathcal{I}$ es la tercera estructura y $A(x)=\mathit{abierto}$, entonces
    $$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_A(t) & = \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) & = s^I(\mathit{abierto} +^I s^I(0^I)) = \\ & = s^I(\mathit{abierto} +^I s^I(\mathit{cerrado})) & = s^I(\mathit{abierto} +^I \mathit{abierto}) = \\ & = s^I(\mathit{abierto}) & = \mathit{cerrado} \end{array}$$

Evaluación de términos

- Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L y una asignación A en $\mathcal{I}$, se define la función de evaluación de términos $\mathcal{I}_A : \text{Térm}(L) \to U$ por
$$\mathcal{I}_A(t) = \begin{cases} I(c), & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ A(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ I(f)(\mathcal{I}_A(t_1), \dots, \mathcal{I}_A(t_n)), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$
- $\mathcal{I}_A(t)$ se lee "el valor de t en $\mathcal{I}$ respecto de A".
- Ejemplo: Sean L el lenguaje de la página 26, t el término $s(+(x, s(0)))$, $\mathcal{I}$ la primera estructura y $A(x) = 3$.
$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(+(x, s(0)))) && = I(s)(\mathcal{I}_A(+(x, s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) && = I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) && = I(s)(I(+)(3, I(s)(I(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(0))) && = I(s)(I(+)(3, 1)) = \\ &= I(s)(4) && = 5 \end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L y una asignación A sobre $\mathcal{I}$, se define la función de evaluación de fórmulas $\mathcal{I}_A : \text{Fórm}(L) \to \mathbb{B}$ por
  - Si F es $t_1 = t_2$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_=(\mathcal{I}_A(t_1), I_A(t_2))$
  - Si F es $P(t_1, \dots, t_n)$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_{I(P)}(\mathcal{I}_A(t_1), \dots, \mathcal{I}_A(t_n))$
  - Si F es $\neg G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_\neg(\mathcal{I}_A(G))$
  - Si F es $G * H$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_*(\mathcal{I}_A(G), \mathcal{I}_A(H))$
  - Si F es $\forall x\ G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si para todo } u \in U \text{ se tiene} \\ & \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
  - Si F es $\exists x\ G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } u \in U \text{ tal que} \\ & \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $\mathcal{I}_A(F)$ se lee "el valor de F en $\mathcal{I}$ respecto de A".

Conceptos auxilares para la evaluación de fórmulas

- La función de verdad de la igualdad en U es la función $H_= : U^2 \to \mathbb{B}$ definida por
$$H_=(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } u_1 = u_2; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
- Función de verdad de una relación: Si R es una relación n–aria en U (i.e. $R \subseteq U^n$), entonces la función de verdad de R es la función $H_R : U^n \to \mathbb{B}$ definida por
$$H_R(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } (u_1, \dots, u_n) \in R; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
- Variante de una asignación: Sea A una asignación en la estructura (U, I) y $u \in U$. Mediante $A[x/u]$ se representa la asignación definida por
$$A[x/u](y) = \begin{cases} u, & \text{si } y \text{ es } x; \\ A(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

Ejemplo de evaluación de fórmula

Evaluación de $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = \mathrm{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathrm{V} \text{ y} \\ & \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathrm{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathrm{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = \mathrm{V} \text{ ó} \\ & \mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}P(x,y) = \mathrm{V} \end{aligned}$$

$\mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = P^I(1,1) = \mathrm{V}$

Luego, $\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathrm{V}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathrm{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{A[x/2,y/1]}P(x,y) = \mathrm{V} \text{ ó} \\ & \mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = \mathrm{V} \end{aligned}$$

$\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = P^I(2,2) = \mathrm{V}$

Luego, $\mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y\ P(x,y)) = \mathrm{V}$.

Por tanto, $\mathcal{I}_A(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = \mathrm{V}$

Ejemplo de evaluación de fórmulas

Evaluación de $\forall x\ g(g(x)) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

$$\mathcal{I}_A(\forall x\ g(g(x)) = x) = \text{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]} g(g(x)) = x = \text{V y} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]} g(g(x)) = x = \text{V} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(1)) = 1) \\ &= (g^I(2) = 1) \\ &= (1 = 1) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(2)) = 2) \\ &= (g^I(1) = 2) \\ &= (2 = 2) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_A(\forall x\ g(g(x)) = x) = \text{V}$.

Dependencias en la evaluación de fórmulas

- Ejemplo de dependencia del universo: Sea G la fórmula $\forall x\, \exists y\, R(y,x)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) = \text{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, I), I(R) = <$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $\mathcal{I}_A(G) = \text{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = <$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la estructura: Sea G la fórmula $\exists x\, \forall y\, R(x,y)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) = \text{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $\mathcal{I}_A(G) = \text{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \geq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la asignación: Sea G la fórmula $\forall y\, R(x,y)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) = \text{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$.
  - $\mathcal{I}_A(G) = \text{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$.

Evaluación y variables libres

- Sea t un término de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
  - Si A y B son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables de t, entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$.
  - Si t no tiene variables, entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(t)$.
- Sea F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
  - Si A y B son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables libres de F, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$.
  - Si F es cerrada, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(F)$.

Modelo de una fórmula

- Sean F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
  - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de F si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
    Se representa por $\mathcal{I}_A \models F$.
  - $\mathcal{I}$ es un modelo de F si, para todo asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
    Se representa por $\mathcal{I} \models F$.
- Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(f) = +$ e $I(g) = *$.
  - Si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y) = 2$. Entonces
    $\mathcal{I}_A \models f(x,y) = g(x,y)$,
  - Si B es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $B(x) = 1, B(y) = 2$. Entonces
    $\mathcal{I}_B \not\models f(x,y) = g(x,y)$,
  - $\mathcal{I} \not\models f(x,y) = g(x,y)$
  - $\mathcal{I} \models f(x,y) = f(y,x)$

Satisfacibilidad y validez

- Def.: Sea F una fórmula de L.
  - F es válida si toda estructura de L es modelo de F,
    (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
    Se representa por $\models F$.
  - F es satisfacible si tiene alguna realización
    (i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en I tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
  - F es insatisfacible si no tiene ninguna realización
    (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en I se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 0$).
- Ejemplos:
  - $\exists x\ P(x) \lor \forall x\ \neg P(x)$ es válida.
  - $\exists x\ P(x) \land \exists x\ \neg P(x)$ es satisfacible, pero no es válida.
  - $\forall x\ P(x) \land \exists x\ \neg P(x)$ es insatisfacible.

Satisfacibilidad y validez

- F es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.
  F es válida
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$
  $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible.
- Si F es válida, entonces F es satisfacible.
  F es válida
  $\implies$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
  $\implies$ existe una estructura $\mathcal{I}$ y una asignación A tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
  $\implies$ F es satisfacible.
- F es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.
  $\forall x\ P(x)$ y $\neg\forall x\ P(x)$ son satisfacibles.
- Sea F una fórmula de L y $x_1, \dots, x_n$ las variables libres de F.
  - F es válida syss $\forall x_1 \dots \forall x_n\ F$ es válida.
    [$\forall x_1 \dots \forall x_n\ F$ es el cierre universal de F].
  - F es satisfacible syss $\exists x_1 \dots \exists x_n\ F$ es satisfacible.
    [$\exists x_1 \dots \exists x_n\ F$ es el cierre existencial de F].

Modelo de un conjunto de fórmulas

- Notación: $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- Def.: Sean S un conjunto de fórmulas de L, $\mathcal{I}$ una estructura de L y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de S si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$. Se representa por $\mathcal{I}_A \models S$.
  - $\mathcal{I}$ es un modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I} \models F$ (i.e. para toda $F \in S$ y toda asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A(F) = 1$). Se representa por $\mathcal{I} \models S$.
- Ejemplo: Sea $S = \{\forall y\ R(x,y),\ \forall y\ f(x,y) = y\}$.
  - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de S.
  - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = <, f^I = +, A(x) = 0$ no es realización de S.
- Ejemplo: Sea $S = \{R(e,y),\ f(e,y) = y\}$.
  - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = +, e^I = 0$ es modelo de S.
  - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <, f^I = +, e^I = 0$ no es modelo de S.

Consistencia de un conjunto de fórmulas

- Def.: Sea S un conjunto de fórmulas de L.
  - S es consistente si S tiene alguna realización (i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ tales que, para toda $F \in S$, $I_A(F) = 1$).
  - S es inconsistente si S no tiene ninguna realización (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, existe alguna $F \in S$, tal que $I_A(F) = 0$).
- Ejemplos:
  - $S = \{\forall y\ R(x,y),\ \forall y\ f(x,y) = y\}$ es consistente.
    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de S.
  - $S = \{P(x) \to Q(x),\ \forall y\ P(y),\ \neg Q(x)\}$ es inconsistente.
- Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas *cerradas* de L. Entonces S es consistente syss S tiene algún modelo.

Consecuencia lógica

- Def.: Sean F una fórmula de L y S un conjunto de fórmulas de L.
  - F es consecuencia lógica de S si todas las realizaciones de S lo son de F.
    (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
    si $\mathcal{I}_A \models S$ entonces $\mathcal{I}_A \models F$).
    Se representa por $S \models F$.
  - Se escribe $G \models F$ en lugar de $\{G\} \models F$.
  - Se escribe $G \not\models F$ en lugar de $\{G\} \not\models F$.
- Ejemplos:
  - $\forall x\ P(x) \models P(y)$
  - $P(y) \not\models \forall x\ P(x)$
    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \{1, 2\}, P^I = \{1\}, A(y) = 1$.
  - $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ P(c)\} \models Q(c)$
  - $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ Q(c)\} \not\models P(c)$
    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \{1, 2\}, c^I = 1, P^I = \{2\}, Q^I = \{1, 2\}$.
  - $\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ \neg Q(c)\} \models \neg P(c)$
  - $\{P(c),\ \neg P(d)\} \models c \neq d$

Consecuencia lógica e inconsistencia

- $S \models F$ syss $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.
  $S \models F$
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
  si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
  si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$.
  $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
  existe alguna $H \in S \cup \{\neg F\}$ tal que $\mathcal{I}_A(H) = 0$.
  $\iff$ $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.
- Sean F una fórmula *cerrada* de L y S un conjunto de fórmulas *cerradas* de L. Entonces, son equivalentes
  - F es consecuencia lógica de S
  - todos los modelos de S lo son de F.

Equivalencia lógica

- Def.: Sean F y G fórmulas de L. F y G son equivalentes si para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_A(G)$.
  Se representa por $F \equiv G$.
- Ejemplos:
  - $P(x) \not\equiv P(y)$.
    $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $A(x) = 1, A(y) = 2$.
  - $\forall x\ P(x) \equiv \forall y\ P(y)$.
  - $\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$.
  - $\exists x\ (P(x) \land Q(x)) \not\equiv \exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$.
    $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $Q^I = \{2\}$.
- Propiedades: Sean F y G fórmulas cerradas de L.
  - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
  - $F \equiv G$ syss $F \models G$ y $G \models F$.

Equivalencia lógica

- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
  - Reflexiva: $F \equiv F$
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
  - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
  - Prop.: Si en la fórmula F_1 se sustituye una de sus subfórmulas G_1 por una fórmula G_2 lógicamente equivalente a G_1, entonces la fórmula obtenida, F_2, es lógicamente equivalente a F_1.
  - Ejemplo:
    $$\begin{array}{ll} F_1 & = \forall x \; P(x) \to \exists x \; Q(x) \\ G_1 & = \forall x \; P(x) \\ G_2 & = \forall y \; P(y) \\ F_2 & = \forall y \; P(y) \to \exists x \; Q(x) \end{array}$$

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 195–259 y 323–326.
2. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 17–26.
3. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 64–87.
4. J.H. Gallier *Logic for computer science (foundations of automatic theorem Proving)* (June 2003) pp. 146–186.
5. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 90–109 y 128–140.
6. M. Ojeda e I. Pérez de Guzmán *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de primer orden)* (Ágora, 1997) pp. 1–37 y 49–51.
7. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 22–29.