
Ejercicio 1 [2 puntos] *Demostrar mediante deducción natural*

$\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

Solución:

1	$p \to q$	supuesto
2	$\neg p \to q$	supuesto
3	$\neg q$	supuesto
4	$\neg p$	MT $1,3$
5	q	$\to$e $2,4$
6	$\bot$	$\neg$e $3,5$
7	q	RAA $3-6$
8	$(\neg p \to q) \to q$	$\to$i $2-7$
9	$(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$	$\to$i $1-8$

Ejercicio 2 [2 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*

$(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$

es una tautología, En el caso de que no lo sea, calcular a partir de un tablero completo sus contramodelos y una forma normal conjuntiva.

Solución:

Para calcular los contramodelos de $(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$ vamos a construir un tablero completo de su negación.

1.	$\neg((p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q))$	
2.	$p \to q$	(1)
3.	$\neg((q \to \neg r) \to \neg q)$	(1)
4.	$q \to \neg r$	(3)
5.	$\neg\neg q$	(3)
6.	q	(5)

- 7. $\neg q$ (4) Cerrada (6 y 7)
- 8. $\neg r$ (4)
  - 9. $\neg p$ (2) Abierta $\{\neg p, q, \neg r\}$
  - 10. q (2) Abierta $\{q, \neg r\}$

Al tener ramas abiertas, la fórmula original no es una tautología y sus contramodelos son:

- v_1 tal que $v_1(p) = 0$, $v_1(q) = 1$ y $v_1(r) = 0$,
- v_2 tal que $v_2(q) = 1$ y $v_2(r) = 0$,

El segundo incluye al primero.

Sea F la fórmula dada (es decir, $(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q))$. Una forma normal disyuntiva de $\neg F$ es $q \wedge \neg r$. Por tanto, $\neg F \equiv q \wedge \neg r$ de donde se sigue que $F \equiv \neg q \vee r$. Luego, una forma normal disyuntiva de F es $\neg q \vee r$.

Ejercicio 3 [2 puntos] *Demostrar por deducción natural que:*
$\{\exists y \forall x P(x,y),\ \forall x \forall y (\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))\} \models \forall x \exists y Q(x,y)$

Solución:

La demostración es

1	$\exists y \forall x P(x,y)$	*premisa*
2	$\forall x \forall y (\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))$	*premisa*
3	a	*supuesto*
4	$b,\ \forall x P(x,b)$	*supuesto*
5	$P(a,b)$	$\forall$e 4
6	$\neg\neg P(a,b)$	$\neg\neg$i 5
7	$\forall y (\neg Q(a,y) \to \neg P(a,y))$	$\forall$e 2
8	$\neg Q(a,b) \to \neg P(a,b)$	$\forall$e 7
9	$\neg\neg Q(a,b)$	MT $8,6$
10	$Q(a,b)$	$\neg\neg$e 9
11	$\exists y Q(a,y)$	$\exists$i 10
12	$\exists y Q(a,y)$	$\exists$e $1, 4-11$
13	$\forall x \exists y Q(x,y)$	$\forall$i $3-12$

Ejercicio 4 [2 puntos] *Se considera la siguiente argumentación:*

1. Quien intente entrar en un país y no tenga pasaporte, encontrará algún aduanero que le impida el paso.
2. A algunas personas motorizadas que intentan entrar en un país le impiden el paso únicamente personas motorizadas.

3. Ninguna persona motorizada tiene pasaporte.
4. Por tanto, ciertos aduaneros están motorizados.

Las premisas pueden formalizarse por:

1. $\forall x(E(x) \land \neg P(x) \to \exists y(A(y) \land I(y,x)))$
2. $\exists x(M(x) \land E(x) \land \forall y(I(y,x) \to M(y)))$
3. $\forall x(M(x) \to \neg P(x))$

Decidir, mediante resolución, si el argumento es correcto (es decir, si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas).

Solución:

La formalización de la conclusión es $\exists x(A(x) \land M(x))$.

Para hacer la resolución, en primer lugar se calculan las formas clausales de las premisas y de la negación de la conclusión:

$$\begin{array}{ll}
 & \forall x(E(x) \land \neg P(x) \to \exists y(A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \forall x(\neg(E(x) \land \neg P(x)) \lor \exists y(A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \forall x((\neg E(x) \lor \neg\neg P(x)) \lor \exists y(A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \forall x((\neg E(x) \lor P(x)) \lor \exists y(A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \forall x \exists y((\neg E(x) \lor P(x)) \lor (A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \forall x \exists y((\neg E(x) \lor P(x) \lor A(y)) \land (\neg E(x) \lor P(x) \lor I(y,x))) \\
\equiv_{sat} & \forall x((\neg E(x) \lor P(x) \lor A(f(x))) \land (\neg E(x) \lor P(x) \lor I(f(x),x))) \\
\equiv & \{\{\neg E(x), P(x), A(f(x))\}, \{\neg E(x), P(x), I(f(x),x)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \exists x(M(x) \land E(x) \land \forall y(I(y,x) \to M(y))) \\
\equiv & \exists x(M(x) \land E(x) \land \forall y(\neg I(y,x) \lor M(y))) \\
\equiv & \exists x \forall y(M(x) \land E(x) \land (\neg I(y,x) \lor M(y))) \\
\equiv_{sat} & \forall y(M(a) \land E(a) \land (\neg I(y,a) \lor M(y))) \\
\equiv & \{\{M(a)\}, \{E(a)\}, \{\neg I(y,a), M(y)\}\}
\end{array}$$

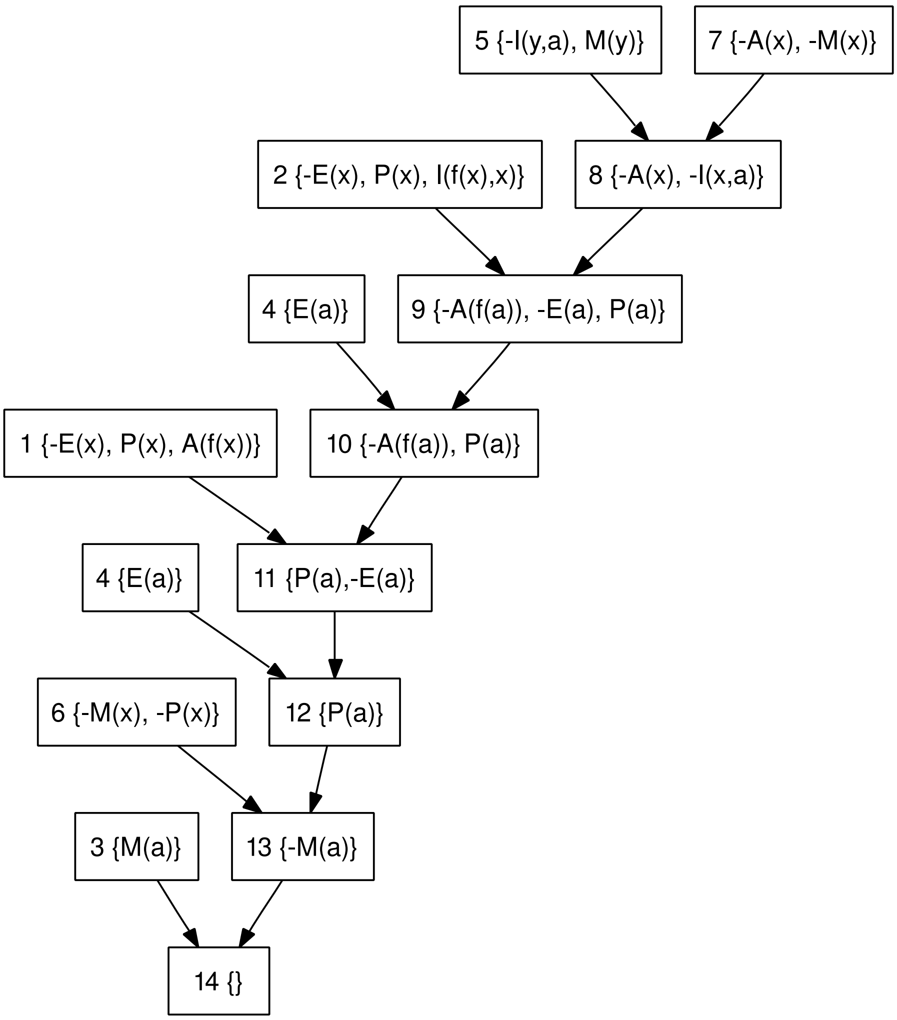
$$\begin{array}{ll}
 & \forall x(M(x) \to \neg P(x)) \\
\equiv & \forall x(\neg M(x) \lor \neg P(x)) \\
\equiv & \{\{\neg M(x), \neg P(x)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg \exists x(A(x) \land M(x)) \\
\equiv & \forall x \neg(A(x) \land M(x)) \\
\equiv & \forall x(\neg A(x) \lor \neg M(x)) \\
\equiv & \{\{\neg A(x), \neg M(x)\}\}
\end{array}$$

La demostración, por resolución lineal, es

1	$\{\neg E(x), P(x), A(f(x))\}$	Premisa 1a	
2	$\{\neg E(x), P(x), I(f(x), x)\}$	Premisa 1b	
3	$\{M(a)\}$	Premisa 2a	
4	$\{E(a)\}$	Premisa 2b	
5	$\{\neg I(y,a), M(y)\}$	Premisa 2c	
6	$\{\neg M(x), \neg P(x)\}$	Premisa 3	
7	$\{\neg A(x), \neg M(x)\}$	Conclusión	
8	$\{\neg A(x), \neg I(x,a)\}$	Resolvente de 7.2 y 5.2 con	$\sigma = [y/x]$
9	$\{\neg A(f(a)), \neg E(a), P(a)\}$	Resolvente de 8.2 y 2.3 con	$\theta_1 = [x/x_1]$, $\theta_2 = [x/x_2]$, $\sigma = [x_2/a, x_1/f(a)]$
10	$\{\neg A(f(a)), P(a)\}$	Resolvente de 9.2 y 4.1	
11	$\{P(a), \neg E(a)\}$	Resolvente de 10.2 y 1.3 con	$\sigma = [x/a]$
12	$\{P(a)\}$	Resolvente de 11.2 y 4.1	
13	$\{\neg M(a)\}$	Resolvente de 12.1 y 6.2 con	$\sigma = [x/a]$
14	$\square$	Resolvente de 13.1 y 3.1	

De manera gráfica



Por tanto, el argumento es correcto.

Ejercicio 5 [2 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \models F$ y $S \models \neg F$.*
2. *Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \not\models F$ y $S \not\models \neg F$.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es cierta. Sean $S = \{p \land \neg p\}$ y F la fórmula p. Entonces

- $S \models F$ (ya que $\{p \land \neg p\} \models p$) y
- $S \models \neg F$ (ya que $\{p \land \neg p\} \models \neg p$).

Solución del apartado 2: La proposición es cierta. Sean $S = \{p\}$ y F la fórmula q. Entonces

- $S \not\models F$ (ya que $\{p\} \not\models q$ puesto que la valoración v_1 tal que $v_1(p) = 1$ y $v_1(q) = 0$ es un contramodelo) y
- $S \not\models \neg F$ (ya que $\{p\} \not\models \neg q$ puesto que la valoración v_2 tal que $v_2(p) = 1$ y $v_2(q) = 1$ es un contramodelo).