Ejercicio 1 [2 puntos] *Formalizar las siguientes sentencias:*

1. *Todos han aprobado Cálculo salvo Benito.*
2. *Todos aprueban al menos dos asignaturas.*
3. *Nadie ha aprobado más de una asignatura.*

En las formalizaciones usar los siguientes símbolos $A(x,y)$ que representa que x ha aprobado la asignatura y, c que representa la asignatura de Cálculo y b que representa a Benito.

Solución:

1. Todos han aprobado Cálculo salvo Benito.
   $\forall x(x \neq b \to A(x,c))$
2. Todos aprueban al menos dos asignaturas.
   $\forall x \exists y \exists z(A(x,y) \land A(x,z) \land y \neq z)$
3. Nadie ha aprobado más de una asignatura.
   $\forall x \forall y \forall z(A(x,y) \land A(x,z) \to y = z)$

Ejercicio 2 [2 puntos] *Demostrar, mediante deducción natural, que la siguiente fórmula es una tautología* $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

Solución:

1	$p \to (q \to r)$	supuesto
2	$p \to q$	supuesto
3	p	supuesto
4	q	$\to$e $2,3$
5	$q \to r$	$\to$e $1,3$
6	r	$\to$e $5,4$
7	$p \to r$	$\to$i $3-6$
8	$(p \to q) \to (p \to r)$	$\to$i $2-7$
9	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$\to$i $1-8$

Ejercicio 3 [2 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si*

$$(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

En el caso de que no lo sea, dar un contramodelo.

Solución:

El tablero es

$$\begin{array}{lll}
1. & (p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r) & \\
2. & \neg((p \rightarrow q) \rightarrow r) & \\
3. & p \rightarrow q & (2) \\
4. & \neg r & (2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
5.\ \neg p\ \ (3) & 6.\ q\ \ (3)
\end{array}$$

Rama 5:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{lll}
7. & \neg(p \rightarrow r) & (1) \\
9. & p & (7) \\
10. & \neg r & (7) \\
\multicolumn{3}{c}{\text{Cerrada (9,5)}}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
8.\ q \rightarrow r\ \ (1) \\
\begin{array}{cc}
11.\ \neg q\ \ (8) & 12.\ r\ \ (8) \\
\text{Abierta} &
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Como tiene una rama abierta resulta que

$$(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r) \not\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

Un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = I(q) = I(r) = 0$.

Ejercicio 4 [2 puntos]

1. *Calcular una forma clausal de la fórmula* $\exists y \forall x(\exists z Q(y,z) \rightarrow \exists z(\neg P(x,z) \land R(z)))$

2. *Determinar si las siguientes parejas de términos son unificables y, en el caso de que lo sean, calcular un unificador de máxima generalidad:*

   a*)* $P(f(z,g(a,y)),h(z))$ *y* $P(f(f(u,v),w),h(f(a,b)))$

   b*)* $P(x,y,f(a))$ *y* $P(f(y),g(z),f(z))$

Solución:

Apartado 1.

$$
\begin{array}{rl}
 & \exists y\forall x(\exists zQ(y,z) \to \exists z(\neg P(x,z) \land R(z))) \\
\equiv & \exists y\forall x(\exists zQ(y,z) \to \exists u(\neg P(x,u) \land R(u))) \\
\equiv & \exists y\forall x(\neg\exists zQ(y,z) \lor \exists u(\neg P(x,u) \land R(u))) \\
\equiv & \exists y\forall x(\forall z\neg Q(y,z) \lor \exists u(\neg P(x,u) \land R(u))) \\
\equiv & \exists y\forall x\exists u(\forall z\neg Q(y,z) \lor (\neg P(x,u) \land R(u))) \\
\equiv & \exists y\forall x\exists u\forall z(\neg Q(y,z) \lor (\neg P(x,u) \land R(u))) \\
\approx & \forall x\exists u\forall z(\neg Q(a,z) \lor (\neg P(x,u) \land R(u))) \\
\approx & \forall x\forall z(\neg Q(a,z) \lor (\neg P(x,f(x)) \land R(f(x)))) \\
\equiv & \forall x\forall z((\neg Q(a,z) \lor \neg P(x,f(x))) \land (\neg Q(a,z) \lor R(f(x)))) \\
\equiv & \{\{\neg Q(a,z), \neg P(x,f(x))\}, \{\neg Q(a,z), R(f(x))\}\}
\end{array}
$$

Apartado 2.a Inicialmente se tiene

$P(f(x,b),g(y),f(z,a))$
$P(y,g(f(g(w),w)),f(w,z))$

Para unificar los primeros argumentos, se aplica la sustitución $[y/f(x,b)]$ y se obtiene

$P(f(x,b),g(f(x,b)),f(z,a))$
$P(f(x,b),g(f(g(w),w)),f(w,z))$

Aplicando la sustitución $[x/g(w)]$ se obtiene

$P(f(g(w),b),g(f(g(w),b)),f(z,a))$
$P(f(g(w),b),g(f(g(w),w)),f(w,z))$

Alicando la sustitución $[w/b]$ se obtiene

$P(f(g(b),b),g(f(g(b),b)),f(z,a))$
$P(f(g(b),b),g(f(g(b),b)),f(b,z))$

Aplicando la sustitución $[z/b]$ se obtiene

$P(f(g(b),b),g(f(g(b),b)),f(b,a))$
$P(f(g(b),b),g(f(g(b),b)),f(b,b))$

Como a y b no son unificables, las fórmulas iniciales tampoco lo son.

Apartado 2.b Inicialmente se tiene

$p(x,y,f(a))$
$p(f(y),g(z),f(z))$

Aplicando la sustitución $[x/f(y)]$ se obtiene

$p(f(y),y,f(a))$
$p(f(y),g(z),f(z))$

Aplicando la sustitución $[y/g(z)]$ se obtiene

$p(f(g(z)),g(z),f(a))$
$p(f(g(z)),g(z),f(z))$

Aplicando la sustitución $[z/a]$ se obtiene

$p(f(g(a)),g(a),f(a))$
$p(f(g(a)),g(a),f(a))$

El umg es $[x/f(y)].[y/g(z)].[z/a] = [x/f(g(a)),y/g(a),z/a]$

Ejercicio 5 [2 puntos] *Decidir, mediante resolución, si el siguiente conjunto de cláusulas es consistente*

$$\{ \{\neg P(x,y), R(x,y), Q(x), \neg P(y,x)\},$$
$$\{\neg R(x,y), \neg Q(y), R(y,x)\},$$
$$\{R(x,y), \neg Q(x), \neg Q(y)\},$$
$$\{P(a,b)\},$$
$$\{P(b,a)\},$$
$$\{\neg R(a,b)\} \}$$

En el caso de que lo sea, dar un modelo.

Solución:

La demostración por resolución es

1.	$\{\neg P(x,y), R(x,y), Q(x), \neg P(y,x)\}$	
2.	$\{\neg R(x,y), \neg Q(y), R(y,x)\}$	
3.	$\{R(x,y), \neg Q(x), \neg Q(y)\}$	
4.	$\{P(a,b)\}$	
5.	$\{P(b,a)\}$	
6.	$\{\neg R(a,b)\}$	
7.	$\{R(a,b), Q(a), \neg P(b,a)\}$	por 1 y 4 con $[x/a, y/b]$
8.	$\{Q(a), \neg P(b,a)\}$	por 7 y 6
9.	$\{Q(a)\}$	por 8 y 5
10.	$\{\neg R(b,a), \neg Q(a)\}$	por 2 y 6 con $[y/a, x/b]$
11.	$\{\neg R(b,a)\}$	por 9 y 10
12.	$\{\neg Q(a), \neg Q(b)\}$	por 3 y 6 con $[x/a, y/b]$
13.	$\{\neg Q(b)\}$	por 12 y 9
14.	$\{R(b,a), Q(b), \neg P(a,b)\}$	por 1 y 5 con $[x/b, y/a]$
15.	$\{Q(b), \neg P(a,b)\}$	por 14 y 11
16.	$\{\neg P(a,b)\}$	por 15 y 13
17.	$\square$	por 16 y 4

Por tanto, el conjunto es inconsistente.