---

**Ejercicio 1** *[2.5 puntos] Demostrar por deducción natural que:*
$\{\exists y \forall x P(x,y),\ \forall x \forall y(\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))\} \models \forall x \exists y Q(x,y)$

---

**Solución:**

La demostración es

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\exists y \forall x P(x,y)$ | *premisa* |
| 2 | $\forall x \forall y(\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))$ | *premisa* |
| 3 | $a$ | *supuesto* |
| 4 | $b,\ \forall x P(x,b)$ | *supuesto* |
| 5 | $P(a,b)$ | $\forall$e 4 |
| 6 | $\neg\neg P(a,b)$ | $\neg\neg$i 5 |
| 7 | $\forall y(\neg Q(a,y) \to \neg P(a,y))$ | $\forall$e 2 |
| 8 | $\neg Q(a,b) \to \neg P(a,b)$ | $\forall$e 7 |
| 9 | $\neg\neg Q(a,b)$ | MT 8,6 |
| 10 | $Q(a,b)$ | $\neg\neg$e 9 |
| 11 | $\exists y Q(a,y)$ | $\exists$i 10 |
| 12 | $\exists y Q(a,y)$ | $\exists$e 1,4 – 11 |
| 13 | $\forall x \exists y Q(x,y)$ | $\forall$i 3 – 12 |

---

**Ejercicio 2** *[2.5 puntos] Decidir, usando tableros semánticos, si:*

1. $(p \lor q \to r) \to ((p \to r) \land (q \to r))$ *es una tautología.*
2. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$ *es lógicamente válida.*

*En caso negativo, obtener un contramodelo a partir del tablero.*

---

**Solución:**

**Solución del apartado 1**

El tablero de la negación de la fórmula es

$$
\begin{array}{lll}
1. & \neg((p \vee q \to r) \to ((p \to r) \wedge (q \to r))) & \\
2. & p \vee q \to r & (1) \\
3. & \neg((p \to r) \wedge (q \to r)) & (1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\begin{array}{lll}
4. & \neg(p \vee q) & (2) \\
6. & \neg p & (4) \\
7. & \neg q & (4)
\end{array}
&
\begin{array}{ll}
5. \; r & (2)
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\begin{array}{lll}
8. & \neg(p \to r) & (3) \\
10. & p & (8) \\
11. & \neg r & (8) \\
\multicolumn{3}{c}{\text{Cerrada (6,10)}}
\end{array}
&
\begin{array}{lll}
9. & \neg(q \to r) & (3) \\
12. & q & (9) \\
13. & \neg r & (9) \\
\multicolumn{3}{c}{\text{Cerrada (12,7)}}
\end{array}
&
\begin{array}{lll}
14. & \neg(p \to r) & (3) \\
16. & p & (8) \\
17. & \neg r & (8) \\
\multicolumn{3}{c}{\text{Cerrada (17,5)}}
\end{array}
&
\begin{array}{lll}
15. & \neg(q \to r) & (3) \\
18. & q & (9) \\
19. & \neg r & (9) \\
\multicolumn{3}{c}{\text{Cerrada (19,5)}}
\end{array}
\end{array}
$$

Como todas las ramas están cerradas, la fórmula es una tautología.

**Solución del apartado 2**

El tablero de la negación de la fórmula es

$$
\begin{array}{lll}
1. & \neg(\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))) & \\
2. & \exists x(P(x) \to Q(x)) & (1) \\
3. & \neg(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) & (1) \\
4. & \exists x P(x) & (3) \\
5. & \neg \exists x Q(x) & (3) \\
6. & P(a) & (4) \\
7. & P(b) \to Q(b) & (2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\begin{array}{lll}
8. & \neg P(b) & (7) \\
10. & \neg Q(a) & (3a) \\
11. & \neg Q(b) & (3b) \\
 & \text{Abierta} &
\end{array}
&
\begin{array}{ll}
9. \; Q(b) & (7)
\end{array}
\end{array}
$$

Como tiene una rama abierta, la fórmula no es válida. Un contraejemplo obtenido a partir del tablero es $(U,I)$ tal que $U = \{a,b\}$, $I(P) = \{a\}$, $I(Q) = \emptyset$.

---

**Ejercicio 3** *[2.5 puntos] Decidir, usando resolución, si:*

$$\{\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(x,y)),\ \forall x \forall y(Q(x,y) \to R(x,y))\} \models \forall x \exists y(P(x,y) \wedge R(x,y))$$

*En caso negativo, obtener un contramodelo a partir de la resolución.*

---

**Solución:**

En primer lugar se calcula las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión. La de primera hipótesis es

$$\begin{array}{rl} & \forall x \exists y (P(x,y) \land Q(x,y)) \\ \approx & \forall x (P(x,f(x)) \land Q(x,f(x))) \\ \equiv & \{\{P(x,f(x))\},\{Q(x,f(x))\}\} \end{array}$$

La de la segunda hipótesis es

$$\begin{array}{rl} & \forall x \forall y (Q(x,y) \to R(x,y)) \\ \equiv & \forall x \forall y (\neg Q(x,y) \lor R(x,y)) \\ \equiv & \{\{\neg Q(x,y), R(x,y)\}\} \end{array}$$

La de la negación de la conclusión es

$$\begin{array}{rl} & \neg \forall x \exists y (P(x,y) \land R(x,y)) \\ \equiv & \exists x \forall y \neg (P(x,y) \land R(x,y)) \\ \equiv & \exists x \forall y (\neg P(x,y) \lor \neg R(x,y)) \\ \approx & \forall y (\neg P(a,y) \lor \neg R(a,y)) \\ \equiv & \{\{\neg P(a,y), \neg R(a,y)\}\} \end{array}$$

La resolución es

$$\begin{array}{lll} 1. & \{P(x,f(x))\} & \\ 2. & \{Q(x,f(x))\} & \\ 3. & \{\neg Q(x,y), R(x,y)\} & \\ 4. & \{\neg P(a,y), \neg R(a,y)\} & \\ 5. & \{\neg R(a,f(a)\} & \text{de 1 y 4 con } [x/a, y/f(a)] \\ 6. & \{\neg Q(a,f(a)\} & \text{de 5 y 3 con } [x/a, y/f(a)] \\ 7. & \square & \text{de 6 y 2 con } [x/a] \end{array}$$

Por tanto la conclusión es consecuencia de las hipótesis.

---

**Ejercicio 4** *[2.5 puntos]*

1. *Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:*

   a) *Si $S$ es un conjunto consistente de fórmulas y $F$ es una fórmula satisfacible, ¿el conjunto $S \cup \{F\}$ es consistente? ¿y si $F$ es una tautología?*

   b) *Sean $G_1$ y $G_2$ dos formas de Skolem de una fórmula $F$, ¿son $G_1$ y $G_2$ lógicamente equivalentes?*

2. *Usando los símbolos $I(x)$ = x es informático; $A(x,y)$ = x admira a y, formalizar las siguientes expresiones en la lógica de primer orden.*

   a) *Los informáticos se admiran a sí mismos.*

b) *Algún informático no admira a nadie.*

c) *Algún informático solamente se admira a sí mismo.*

d) *Ningún informático es admirado por todos los informáticos.*

---

**Solución:**

**Solución del apartado 1a**

Se puede encontrar un conjunto $S$ consistente y una fórmula $F$ satisfacible tales que $S \cup \{F\}$ es inconsistente. Por ejemplo, tomando como $S$ el conjunto $\{p\}$ y como $F$ la fórmula $\neg p$.

Si $S$ es consistente y $F$ es una tautología, entonces $S \cup \{F\}$ es consistente. En efecto, por ser $S$ consistente existe una interpretación $I$ tal que $I \models S$; como $F$ es una tautología, $I(F) = 1$; Luego, $I \models S \cup \{F\}$ y, por tanto, $S \cup \{F\}$ es consistente.

**Solución del apartado 1b**

Es falso, ya que $P(a)$ y $P(b)$ son dos formas de Skolem de $\exists x P(x)$ que no son lógicamente equivalentes (por ejemplo, en la interpretación $I$ de universo $\{1,2\}$ con $I(a) = 1$, $I(b) = 2$ e $I(P) = \{1\}$, se tiene que $I \models P(a)$) e $I \not\models P(b)$).

**Solución del apartado 2**

1. Los informáticos se admiran a sí mismos.
   $\forall x(I(x) \to A(x,x))$

2. Algún informático no admira a nadie.
   $\exists x(I(x) \land \neg \exists y A(x,y))$

3. Algún informático solamente se admira a sí mismo.
   $\exists x(I(x) \land A(x,x) \land \forall y(A(x,y) \to y = x))$

4. Ningún informático es admirado por todos los informáticos.
   $\neg \exists x(I(x) \land \forall y(I(y) \to A(y,x)))$