Ejercicio 1 [2.5 puntos] *Demostrar mediante deducción natural*
$\vdash (\neg q \to \neg p) \to ((\neg p \to q) \to q)$

Solución:

1	$\neg q \to \neg p$	supuesto
2	$\neg p \to q$	supuesto
3	$\neg q$	supuesto
4	$\neg p$	$\to$e $1,3$
5	q	$\to$e $2,4$
6	$\bot$	$\neg$e $3,5$
7	q	RAA$3-6$
8	$(\neg p \to q) \to q$	$\to$i $2-7$
9	$(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$	$\to$i $1-8$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Si un conjunto de literales S es inconsistente, entonces existe un literal $L \in S$ tal que $\neg L \in S$.*
2. *Si un conjunto de fórmulas S es inconsistente, entonces existe una fórmula $F \in S$ tal que $\neg F \in S$.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es cierta, ya que si no existe un literal $L \in S$ tal que $\neg L \in S$ el conjunto S es consistente y un modelo de S es la intepretación I tal que para todo p, $I(p) = 1$ syss $p \in S$.

Solución del apartado 2: La proposición es falsa. Por ejemplo, el conjunto
$S = \{p, p \to q, p \to \neg q\}$
es inconsistente y no existe ninguna fórmula $F \in S$ tal que $\neg F \in S$.

Ejercicio 3 [2.5 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*
$p \to q \vee s$
es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas
$\{q \to s,\ \neg(\neg p \wedge q)\}$
En el caso de que no lo sea, dar un contramodelo.

Solución:

La fórmula es consecuencia syss el conjunto

$$\{q \to s,\ \neg(\neg p \land q),\ \neg(p \to q \lor s)\}$$

tiene un tablero completo cerrado.

Como el tablero

1. $q \to s$
2. $\neg(\neg p \land q)$
3. $\neg(p \to q \lor s)$
4. p (3)
5. $\neg(q \lor s)$ (3)
6. $\neg q$ (5)
7. $\neg s$ (5)

- 8. $\neg q$ (1)
  - 10. $\neg\neg p$ (2)
    12. p (10)
    Abierta
  - 11. $\neg q$ (2)
- 9. s (1)

tiene una rama abierta, la fórmula no es consecuencia. Además, un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = 1$, $I(q) = I(s) = 0$.

Ejercicio 4 [2.5 puntos] *Decidir, mediante resolución, si el siguiente conjunto es consistente*

$$S = \{p \leftrightarrow \neg q, q \to p, r \to q, q \to r \land p, \neg(q \to r) \lor p\}$$

En el caso de que lo sea, calcular sus modelos y decidir cuáles de las siguientes fórmulas son consecuencias de S:

- $(p \lor (p \leftrightarrow (q \land s))) \leftrightarrow ((\neg q \land \neg r) \lor (p \to (r \leftrightarrow s)))$
- $p \lor (p \leftrightarrow (q \land s))) \leftrightarrow ((\neg q \land r) \land (p \to (r \leftrightarrow s))$

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de cada fórmula del conjunto:

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow \neg q &\equiv (p \to \neg q) \land (\neg q \to p) \\ &\equiv (\neg p \lor \neg q) \land (\neg\neg q \lor p) \\ &\equiv (\neg p \lor \neg q) \land (q \lor p) \\ &\equiv \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q \to p &\equiv \neg q \lor p \\ &\equiv \{\{\neg q, p\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \to q &\equiv \neg r \lor q \\ &\equiv \{\{\neg r, q\}\} \end{aligned}$$

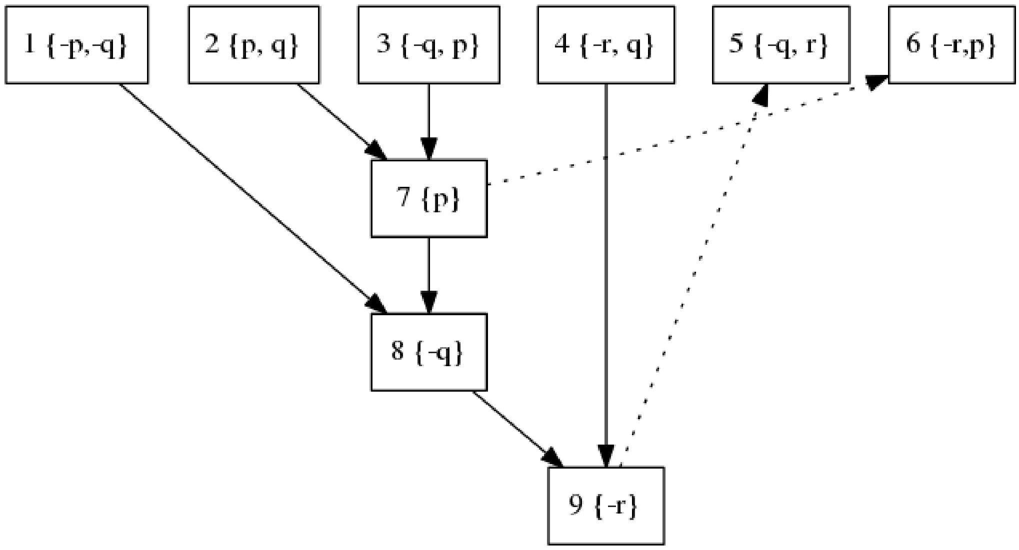
$$\begin{aligned} q \to r \land p &\equiv \neg q \lor (r \land p) \\ &\equiv (\neg q \lor r) \land (\neg q \lor p)) \\ &\equiv \{\{\neg q, r\}, \{\neg q, p\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\neg(q \rightarrow r) \vee p &\equiv \neg(\neg q \vee r) \vee p \\
&\equiv (q \wedge \neg r) \vee p \\
&\equiv (q \vee p) \wedge (\neg r \vee p) \\
&\equiv \{\{q, p\}, \{\neg r, p\}\}
\end{aligned}$$

Aplicando resolución proposicional al conjunto de cláusulas

$$\{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg q, p\}, \{\neg r, q\}, \{\neg q, r\}, \{\neg r, p\}\}$$

se obtiene el siguiente grafo:



Obsérvese que el grafo es saturado y que las cláusulas no subsumidas son $\{p\}, \{\neg q\}$ y $\{\neg r\}$. Por tanto, el conjunto de fórmulas es consistente. Un modelo del mismo es una interpretación I tal que $I(p) = 1$ e $I(q) = I(r) = 0$.

Para comprobar si son consecuencia de S basta calcular el valor de la fórmula en el I modelo de S. La evaluación de la primera fórmula es

$$\begin{aligned}
& I(p \vee (p \leftrightarrow (q \wedge s))) \leftrightarrow ((\neg q \wedge \neg r) \vee (p \rightarrow (r \leftrightarrow s))) \\
= \;& I(1 \vee (p \leftrightarrow (q \wedge s))) \leftrightarrow ((\neg 0 \wedge \neg 0) \vee (p \rightarrow (r \leftrightarrow s))) \\
= \;& I(1 \vee (p \leftrightarrow (q \wedge s))) \leftrightarrow (1 \vee (p \rightarrow (r \leftrightarrow s))) \\
= \;& I(1 \leftrightarrow 1) \\
= \;& 1
\end{aligned}$$

Por tanto, $p \vee (p \leftrightarrow (q \wedge s))) \leftrightarrow ((\neg q \wedge \neg r) \vee (p \rightarrow (r \leftrightarrow s))$ es consecuencia lógica de S.

La evaluación de la segunda fórmula es.

$$\begin{aligned}
& I(p \vee (p \leftrightarrow (q \wedge s))) \leftrightarrow ((\neg q \wedge r) \wedge (p \rightarrow (r \leftrightarrow s))) \\
= \;& I(1 \vee (p \leftrightarrow (q \wedge s))) \leftrightarrow ((\neg q \wedge 0) \wedge (p \rightarrow (r \leftrightarrow s))) \\
= \;& I(1 \vee (p \leftrightarrow (q \wedge s))) \leftrightarrow (0 \wedge (p \rightarrow (r \leftrightarrow s))) \\
= \;& I(1 \leftrightarrow 0) \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

Por tanto, $p \vee (p \leftrightarrow (q \wedge s))) \leftrightarrow ((\neg q \wedge r) \wedge (p \rightarrow (r \leftrightarrow s))$ no es consecuencia lógica de S.