Ejercicio 1 *Demostrar o refutar razonadamente:*

1. *Si F es consecuencia lógica de S_1 y de S_2, también es consecuencia lógica de $S_1 \cap S_2$.*
2. *Si para todo conjunto S se verifica que $S \models F \Leftrightarrow S \models G$, entonces $F \equiv G$.*

Solución:

Apartado 1. Es falso ya que si $S_1 = \{p\}$, $S_2 = \{q\}$ y $F = p \lor q$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, F es consecuencia lógica de S_1 y de S_2, pero lo es de $S_1 \cap S_2$.

Apartado 2. Es cierto, ya que tomando como S el conjunto $\{F\}$ se tiene que $\{F\} \models F \Leftrightarrow \{F\} \models G$ y, puesto que $\{F\} \models F$ se tiene que $\{F\} \models G$ y, por tanto, $F \models G$.

Análogamente, tomando como S el conjunto $\{G\}$, se tiene $G \models F$.

Por consiguiente, $F \equiv G$.

Ejercicio 2 *Demostrar mediante deducción natural*

1. $\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$
2. $\{\forall x \neg R(x,x), \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))\} \vdash \forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))$

Solución:

Apartado 1.

1	$p \to q$	Supuesto
2	$\neg p \to q$	Supuesto
3	$p \lor \neg p$	LEM
4	p	Supuesto
5	q	$\to$e $1,4$
6	$\neg p$	Supuesto
7	q	$\to$e $2,6$
8	q	$\lor$e $3,4-5,6-7$
9	$(\neg p \to q) \to q$	$\to$i $2-8$
10	$(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$	$\to$i $1-9$

Apartado 2.

1	$\forall x \neg R(x,x)$	Premisa
2	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))$	Premisa
3	a	Supuesto
4	b	Supuesto
5	$R(a,b)$	Supuesto
6	$R(b,a)$	Supuesto
7	$\neg R(a,a)$	$\forall$e $1,3$
8	$\forall y \forall z (R(a,y) \land R(y,z) \to R(a,z))$	$\forall$e $2,3$
9	$\forall z (R(a,b) \land R(b,z) \to R(a,z))$	$\forall$e $8,4$
10	$R(a,b) \land R(b,a) \to R(a,a)$	$\forall$e $9,3$
11	$R(a,b) \land R(b,a)$	$\land$i $5,6$
12	$R(a,a)$	$\to$e $10,11$
13	$\bot$	$\neg$e $7,12$
14	$\neg R(b,a)$	$\neg$i $6-13$
15	$R(a,b) \to \neg R(b,a)$	$\to$i $5-14$
16	$\forall y (R(a,y) \to \neg R(y,a))$	$\forall$i $4-15$
17	$\forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))$	$\forall$i $3-16$

Ejercicio 3 *Decidir, por tableros semánticos, si las siguientes fórmulas son válidas:*

1. $p \to (q \lor r) \land (\neg q \land (p \lor r)) \to (r \to q)$
2. $\neg \forall x \exists y \forall z (\neg P(x,z) \land P(z,y))$

Solución:

Apartado 1.

1.	$\neg(p \to ((q \vee r) \wedge (\neg q \wedge (p \vee r)) \to (r \to q)))$	
2.	p	(1)
3.	$\neg((q \vee r) \wedge (\neg q \wedge (p \vee r)) \to (r \to q))$	(1)
4.	$(q \vee r) \wedge (\neg q \wedge (p \vee r)$	(3)
5.	$\neg(r \to q)$	(3)
6.	$q \vee r$	(4)
7.	$\neg q \wedge (p \vee r)$	(4)
8.	r	(5)
9.	$\neg q$	(5)
10.	$\neg q$	(7)
11.	$p \vee r$	(7)

12\. q (6)
Cerrada 12,9

13\. r (6)

14\. p (11)
Abierta $\{p, \neg q, r\}$

15\. r (11)
Abierta $\{p, \neg q, r\}$

Al tener ramas abiertas, la fórmula no es válida y un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ e $I(r) = 1$.

Apartado 2.

1.	$\neg\neg\forall x \exists y \forall z(\neg P(x,z) \wedge P(z,y))$	
2.	$\forall x \exists y \forall z(\neg P(x,z) \wedge P(z,y))$	(1)
3.	$\exists y \forall z(\neg P(a,z) \wedge P(z,y))$	(2)
4.	$\forall z(\neg P(a,z) \wedge P(z,b))$	(3)
5.	$\neg P(a,b) \wedge P(b,b)$	(4)
6.	$\neg P(a,b)$	(5)
7.	$P(b,b)$	(5)
8.	$\neg P(a,a) \wedge P(a,b)$	(4)
9.	$\neg P(a,a)$	(8)
10.	$P(a,b)$	(8)

Cerrado 10,6

Por tanto, la fórmula es válida.

Ejercicio 4 *Decidir, usando resolución, si las siguientes afirmaciones son correctas. Si alguna no es cierta, proporcionar una interpretación que lo justifique.*

1. $\{\exists x P(x), \forall x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y))\} \models \forall x Q(x)$

2. $\{\exists x P(x), \exists x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y))\} \models \exists x Q(x)$

Solución:

Apartado 1. En primer lugar se calculan las cláusulas:

- Fórmula 1:

$$
\begin{array}{ll}
 & \exists x P(a) \\
\approx & P(a) \\
\equiv & \{\{P(a)\}\}
\end{array}
$$

- Fórmula 2:

$$
\begin{array}{ll}
 & \forall x \forall y (\neg P(x) \lor Q(y)) \\
\equiv & \neg P(x) \lor Q(y) \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(y)\}\}
\end{array}
$$

- Fórmula 3:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg \forall x Q(x) \\
\equiv & \exists x \neg Q(x) \\
\approx & \neg Q(b) \\
\equiv & \{\{\neg Q(b)\}\}
\end{array}
$$

La resolución es

1	$\{P(a)\}$	Premisa
2	$\{\neg P(x), Q(y)\}$	Premisa
3	$\{\neg Q(b)\}$	Premisa
4	$\{Q(y)\}$	Res. 1,2 $[x/a]$
4	$\square$	Res. 3,4 $[y/b]$

Por tanto, la fórmula se verifica la relación de consecuencia lógica.
Apartado 2. En primer lugar se calculan las cláusulas:

- Fórmula 1:

$$
\begin{array}{ll}
 & \exists x P(a) \\
\approx & P(a) \\
\equiv & \{\{P(a)\}\}
\end{array}
$$

- Fórmula 2:

$$
\begin{array}{ll}
 & \exists x \forall y (\neg P(x) \lor Q(y)) \\
\approx & \forall y (\neg P(b) \lor Q(y)) \\
\equiv & \neg P(b) \lor Q(y) \\
\equiv & \{\{\neg P(b), Q(y)\}\}
\end{array}
$$

- Fórmula 3:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg \exists x Q(x) \\
\approx & \forall x \neg Q(x) \\
\equiv & \neg Q(x) \\
\equiv & \{\{\neg Q(x)\}\}
\end{array}
$$

La resolución es

1	$\{P(a)\}$	Premisa
2	$\{\neg P(b), Q(y)\}$	Premisa
3	$\{\neg Q(x)\}$	Premisa
4	$\{\neg P(b)\}$	Res. 1,2 $[x/y]$

Por tanto, la fórmula no se verifica la relación de consecuencia lógica y tiene un contramodelo de Herbrand con universo $U = \{a, b\}$, $I(P) = \{a\}$ e $I(Q) = \emptyset$.