Ejercicio 1 *Formalizar los siguientes hechos:*

1. *Bernardo tiene, al menos, dos alumnos a los que le gusta la Lógica.*
2. *Bernardo tiene, como máximo, dos alumnos a los que le gusta la Lógica.*
3. *A los alumnos felices de Bernardo les gusta la Lógica.*
4. *Bernardo es feliz si a todos sus alumnos les gusta la Lógica.*

usando los símbolos

- $A(x,y)$ *para representar que x es alumno de y,*
- $F(x)$ *para representar que x es feliz,*
- $L(x)$ *para representar que a x le gusta la Lógica y*
- *b para representar a Bernardo.*

Solución:

1. Bernardo tiene, al menos, dos alumnos a los que le gusta la Lógica.
   $\exists x \exists y (A(x,b) \land A(y,b) \land L(x) \land L(y) \land x \neq y)$

2. Bernardo tiene, como máximo, dos alumnos a los que le gusta la Lógica.
   $\forall x \forall y \forall z (A(x,b) \land A(y,b) \land A(z,b) \land L(x) \land L(y) \land L(z) \to z = x \lor z = y)$

3. A los alumnos felices de Bernardo les gusta la Lógica.
   $\forall x (A(x,b) \land F(x) \to L(x))$

4. Bernardo es feliz si a todos sus alumnos les gusta la Lógica.
   $\forall x (A(x,b) \to L(x)) \to F(b)$

Ejercicio 2 *Demostrar mediante deducción natural*

$$\forall x \forall y (P(y) \to R(x,y)) \vdash \forall x (P(x) \to \forall y R(y,x))$$

Solución:

1	$\forall x \forall y (P(y) \to R(x,y))$	Premisa
2	a	Supuesto
3	$P(a)$	Supuesto
4	b	Supuesto
5	$\forall y (P(y) \to R(b,y))$	$\forall$e 1
6	$P(a) \to R(b,a)$	$\forall$e 5
7	$R(b,a)$	$\to$e 6, 3
8	$\forall y R(y,a)$	$\forall$i 4 − 7
9	$P(a) \to \forall y R(y,a)$	$\to$i 3 − 8
10	$\forall x (P(x) \to \forall y R(y,x))$	$\forall$i 2 − 9

Ejercicio 3 *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*

$\forall x \exists y Q(x,y)$

es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas

$\{\exists y \forall x P(x,y),\ \forall x \forall y (\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))\}$

En el caso de que no lo sea, dar un contramodelo.

Solución:

1. $\exists y \forall x P(x,y)$
2. $\forall x \forall y (\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))$
3. $\neg \forall x \exists y Q(x,y)$
4. $\forall x P(x,a)$ (1)
5. $\neg \exists y Q(b,y)$ (3)
6. $\neg Q(b,a)$ (5)
7. $P(b,a)$ (4)
8. $\forall y (\neg Q(b,y) \to \neg P(b,y))$ (2)
9. $\neg Q(b,a) \to \neg P(b,a))$ (8)

10. $\neg\neg Q(b,a)$ (9)	11. $\neg P(b,a)$ (9)
Cerrada 10,6	Cerrada 11,7

Ejercicio 4 *Decidir, por resolución, si el conjunto formado por las siguientes fórmulas es consistente, proporcionando un modelo en caso de serlo:*

- $\neg \exists x (S(x) \land Q(x))$
- $\forall x (P(x) \to Q(x) \lor R(x))$

- $\neg\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$
- $\forall x(Q(x) \lor R(x) \to S(x))$
- $\neg\forall x(P(x) \land R(x))$

Solución:

En primer lugar se calcula la forma clausal de las fórmulas

- Fórmula 1:
$$\begin{array}{ll} & \neg\exists x(S(x) \land Q(x)) \\ \equiv & \forall x\neg(S(x) \land Q(x)) \\ \equiv & \forall x(\neg S(x) \lor \neg Q(x)) \\ \equiv & \{\{\neg S(x), \neg Q(x)\}\} \end{array}$$
- Fórmula 2:
$$\begin{array}{ll} & \forall x(P(x) \to Q(x) \lor R(x)) \\ \equiv & \forall x(\neg P(x) \lor Q(x) \lor R(x)) \\ \equiv & \{\{\neg P(x), Q(x), R(x)\}\} \end{array}$$
- Fórmula 3:
$$\begin{array}{ll} & \neg\exists x P(x) \to \exists x Q(x) \\ \equiv & \neg\exists x P(x) \to \exists y Q(y) \\ \equiv & \neg\neg\exists x P(x) \lor \exists y Q(y) \\ \equiv & \exists x P(x) \lor \exists y Q(y) \\ \equiv & \exists x(P(x) \lor \exists y Q(y)) \\ \equiv & \exists x\exists y(P(x) \lor Q(y)) \\ \approx & \exists y(P(a) \lor Q(y)) \\ \approx & P(a) \lor Q(b) \\ \equiv & \{\{P(a), Q(b)\}\} \end{array}$$
- Fórmula 4:
$$\begin{array}{ll} & \forall x(Q(x) \lor R(x) \to S(x)) \\ \equiv & \forall x(\neg(Q(x) \lor R(x)) \lor S(x)) \\ \equiv & \forall x((\neg Q(x) \land \neg R(x)) \lor S(x)) \\ \equiv & \forall x((\neg Q(x) \lor S(x)) \land (\neg R(x) \lor S(x))) \\ \equiv & \{\{\neg Q(x), S(x)\}, \{\neg R(x), S(x)\}\} \end{array}$$
- Fórmula 5:
$$\begin{array}{ll} & \neg\forall x(P(x) \land R(x)) \\ \equiv & \exists x\neg(P(x) \land R(x)) \\ \equiv & \exists x(\neg P(x) \lor \neg R(x)) \\ \approx & \neg P(c) \lor \neg R(c) \\ \equiv & \{\{\neg P(c), \neg R(c)\}\} \end{array}$$

La resolución es

1	$\{\neg S(x), \neg Q(x)\}$	Premisa
2	$\{\neg P(x), Q(x), R(x)\}$	Premisa
3	$\{P(a), Q(b)\}$	Premisa
4	$\{\neg Q(x), S(x)\}$	Premisa
5	$\{\neg R(x), S(x)\}$	Premisa
6	$\{\neg P(c), \neg R(c)\}$	Premisa
7	$\{\neg Q(x)\}$	Res. 1, 4
8	$\{\neg P(x), R(x)\}$	Res. 2, 7
9	$\{P(a)\}$	Res. 3, 7
10	$\{R(a)\}$	Res. 8, 9
11	$\{S(a)\}$	Res. 5, 10
12	$\{\neg P(c)\}$	Res. 6, 8

Por tanto, el conjunto es consistente y tiene un modelo con universo $U = \{a, b, c\}$ e interpretaciones $I(P) = \{a\}$, $I(Q) = \emptyset$, $I(R) = \{a\}$ e $I(S) = \{a\}$.