

# Soluciones del examen de *Lógica informática* del 8 de septiembre de 2015

José A. Alonso Jiménez

---

Grupo de Lógica Computacional  
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial  
Universidad de Sevilla  
Sevilla, 8 de septiembre de 2015

---

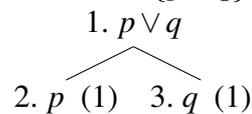
### Ejercicio 1

1. Sea  $S$  un conjunto de fórmulas y  $T$  un tablero asociado a  $S$ . ¿Es cierto que los literales de las hojas de  $T$  son consecuencias lógicas de  $S$ ?
2. Dadas las fórmulas  $F : \forall x \exists y P(x, y)$ ,  $G : \exists y \forall x P(x, y)$ . Decidir razonadamente si son lógicamente equivalentes, o si alguna es consecuencia lógica de la otra.

---

### Solución:

**Apartado 1** No es cierto. Por ejemplo, sea  $S = \{p \vee q\}$ . Entonces, el tablero asociado a  $S$  es



El literal de la hoja izquierda es  $p$  que no es consecuencia de  $S$  (ya que la interpretación  $I$  con  $I(p) = 0$  e  $I(q) = 1$  es un modelo de  $S$  que no lo es de  $p$ ).

**Apartado 2** Las fórmulas no son equivalentes. Por ejemplo, consideremos como universo  $U = \mathbb{N}$  y como  $<$  como la interpretación de  $P$ . Entonces,  $(U, I)$  es un modelo de  $F$  que lo es de  $G$ .

Vamos a demostrar, por resolución, que  $F$  es consecuencia de  $G$ . Lo que equivale a probar que  $\{F, \neg G\}$  es inconsistente. En primer lugar, calculamos las cláusulas,

■ Fórmula 1:

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y P(x, y) \\ \approx & \forall x P(x, f(x)) \\ \equiv & \{\{P(x, f(x))\}\} \end{aligned}$$

■ Fórmula 2:

$$\begin{aligned} & \neg \exists y \forall x P(x, y) \\ \equiv & \forall y \exists x \neg P(x, y) \\ \approx & \forall y \neg P(x, f(x)) \\ \equiv & \{\{\neg P(x, f(x))\}\} \end{aligned}$$

La resolución es

- |   |                       |          |
|---|-----------------------|----------|
| 1 | $\{P(x, f(x))\}$      | Premisa  |
| 2 | $\{\neg P(x, f(x))\}$ | Premisa  |
| 3 | $\square$             | Res. 1,2 |

Por tanto,  $S$  es inconsistente.

---

### Ejercicio 2 Demostrar por deducción natural:

1.  $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \vdash (p \vee q) \rightarrow r$
2.  $\forall x \forall y [P(y) \rightarrow Q(x)] \vdash \exists y P(y) \rightarrow \forall x Q(x)$

---

**Solución:****Apartado 1.**

1	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	Premisa
2	$p \vee q$	Supuesto
3	$p$	Supuesto
4	$p \rightarrow r$	$\wedge e$ 1
5	$r$	$\rightarrow e$ 4,3
6	$q$	Supuesto
7	$q \rightarrow r$	$\wedge e$ 1
8	$r$	$\rightarrow e$ 7,6
9	$r$	$\vee e$ 2,3 – 5,6 – 8
10	$(p \vee q) \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 2 – 9

**Apartado 2.**

1	$\forall x \forall y [P(y) \rightarrow Q(x)]$	Premisa
2	$\exists y P(y)$	Supuesto
3	$a$	Supuesto
4	$P(b)$	Supuesto
5	$\forall y [P(y) \rightarrow Q(a)]$	$\forall e$ 1
6	$P(b) \rightarrow Q(a)$	$\forall e$ 5
7	$Q(a)$	$\rightarrow e$ 6,4
8	$Q(a)$	$\exists e$ 2,4 – 7
9	$\forall x Q(x)$	$\forall i$ 3 – 8
10	$\exists y P(y) \rightarrow \forall x Q(x)$	$\rightarrow i$ 2 – 9

---

**Ejercicio 3** Decidir, usando tableros semánticos, si las siguientes relaciones de consecuencia lógica son o no ciertas.

1.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \models r \rightarrow (q \rightarrow p)$ .

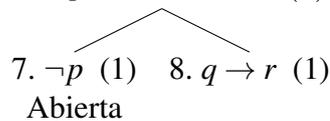
$$2. \{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists xP(x)\} \models \neg\forall x\neg Q(x).$$

En caso de que no lo sean, obtener del tablero un contramodelo que lo justifique.

**Solución:**

**Apartado 1.**

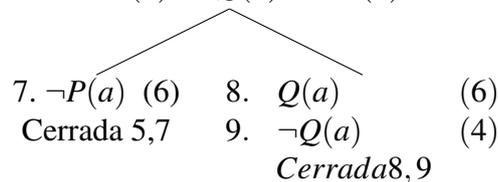
1.  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2.  $\neg(r \rightarrow (q \rightarrow p))$
3.  $r$  (2)
4.  $\neg(q \rightarrow p)$  (2)
5.  $q$  (4)
6.  $\neg p$  (4)



La rama izquierda es abierta. Por tanto, no se da la relación de consecuencia y un contramodelo es  $I$  tal que  $I(p) = 0, I(q) = 1$  e  $I(r) = 1$ .

**Apartado 1.**

1.  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
2.  $\exists xP(x)$
3.  $\neg\neg\forall x\neg Q(x)$
4.  $\forall x\neg Q(x)$  (3)
5.  $P(a)$  (2)
6.  $P(a) \rightarrow Q(a)$  (1)



Por tanto, se cumple la relación de consecuencia.

**Ejercicio 4** Determinar, mediante resolución, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por resolución y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:

$$1. \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \neg\exists xP(x) \vee \forall xQ(x)$$

$$2. \{\exists x\forall y[\neg A(x,y) \rightarrow \exists z(Q(z) \vee P(z,y))], \forall x\exists y\neg A(x,y), \neg\exists x\exists yP(x,y), \neg\exists xQ(x)\}$$

*es consistente*

**Solución:**

**Apartado 1.** En primer lugar, calculamos las cláusulas,

- Fórmula 1:

$$\begin{aligned}
& \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\
\equiv & \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}\}
\end{aligned}$$

■ Fórmula 2:

$$\begin{aligned}
& \neg(\neg\exists xP(x) \vee \forall xQ(x)) \\
\equiv & \neg(\neg\exists xP(x) \vee \forall yQ(y)) \\
\equiv & \neg\neg\exists xP(x) \wedge \neg\forall yQ(y) \\
\equiv & \exists xP(x) \wedge \exists y\neg Q(y) \\
\equiv & \exists x(P(x) \wedge \exists y\neg Q(y)) \\
\equiv & \exists x\exists y(P(x) \wedge \neg Q(y)) \\
\approx & \exists y(P(a) \wedge \neg Q(y)) \\
\approx & P(a) \wedge \neg Q(b) \\
\approx & \{\{P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\}
\end{aligned}$$

La resolución es

- 1  $\{\neg P(x), Q(x)\}$  Premisa
- 2  $\{P(a)\}$  Premisa
- 3  $\{\neg Q(b)\}$  Premisa
- 4  $\{Q(a)\}$  Res. 1,2  $[x/a]$
- 5  $\{\neg P(b)\}$  Res. 1,3  $[x/b]$

Al saturarse sin encontrar la cláusula vacía, no se cumple la relación de consecuencia. Un contramodelo es la estructura con universo  $U = \{a, b\}$  e interpretación  $I$  tal que  $I(P) = \{a\}$  e  $I(Q) = \{a\}$ .

**Apartado 2.** En primer lugar, calculamos las cláusulas,

■ Fórmula 1:

$$\begin{aligned}
& \exists x\forall y[\neg A(x, y) \rightarrow \exists z(Q(z) \vee P(z, y))] \\
\equiv & \exists x\forall y[\neg\neg A(x, y) \vee \exists z(Q(z) \vee P(z, y))] \\
\equiv & \exists x\forall y[A(x, y) \vee \exists z(Q(z) \vee P(z, y))] \\
\equiv & \exists x\forall y\exists z[A(x, y) \vee Q(z) \vee P(z, y)] \\
\approx & \forall y\exists z[A(a, y) \vee Q(z) \vee P(z, y)] \\
\approx & \forall y[A(a, y) \vee Q(f(y)) \vee P(f(y), y)] \\
\equiv & \{\{A(a, y), Q(f(y)), P(f(y), y)\}\}
\end{aligned}$$

■ Fórmula 2:

$$\begin{aligned}
& \forall x\exists y\neg A(x, y) \\
\approx & \forall x\neg A(x, g(x)) \\
\equiv & \{\{\neg A(x, g(x))\}\}
\end{aligned}$$

■ Fórmula 3:

$$\begin{aligned}
& \neg\exists x\exists yP(x, y) \\
\equiv & \neg\exists x\exists yP(x, y) \\
\equiv & \forall x\forall y\neg P(x, y) \\
\equiv & \{\{\neg P(x, y)\}\}
\end{aligned}$$

■ Fórmula 4:

$$\begin{aligned} & \neg\exists xQ(x) \\ \equiv & \forall x\neg Q(x) \\ \equiv & \{\{-Q(x)\}\} \end{aligned}$$

La resolución es

1	$\{A(a, y), Q(f(y)), P(f(y), y)\}$	Premisa
2	$\{\neg A(x, g(x))\}$	Premisa
3	$\{\neg P(x, y)\}$	Premisa
4	$\{\neg Q(x)\}$	Premisa
5	$\{A(a, y), Q(f(y))\}$	Res. 1,3 $[x/f(y)]$
6	$\{A(a, y)\}$	Res. 5,4 $[x/f(y)]$
7	$\square$	Res. 6,2 $[x/a, y/g(a)]$

Al obtenerse la cláusula vacía, el conjunto es inconsistente.