Soluciones del examen de *Lógica informática* del 8 de septiembre de 2015

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 8 de septiembre de 2015

Ejercicio 1

1. *Sea S un conjunto de fórmulas y T un tablero asociado a S. ¿Es cierto que los literales de las hojas de T son consecuencias lógicas de S?*

2. *Dadas las fórmulas $F : \forall x \exists y P(x,y)$, $G : \exists y \forall x P(x,y)$. Decidir razonadamente si son lógicamente equivalentes, o si alguna es consecuencia lógica de la otra.*

Solución:

Apartado 1 No es cierto. Por ejemplo, sea $S = \{p \vee q\}$. Entonces, el tablero asociado a S es

$$\begin{array}{ccc} & 1.\ p \vee q & \\ \swarrow & & \searrow \\ 2.\ p\ (1) & & 3.\ q\ (1) \end{array}$$

El literal de la hoja izquierda es p que no es consecuencia de S (ya que la interpretación I con $I(p) = 0$ e $I(q) = 1$ es un modelo de S que no lo es de p).

Apartado 2 Las fórmulas no son equivalentes. Por ejemplo, consideremos como universo $U = \mathbb{N}$ y como $<$ como la interpretación de P. Entonces, (U,I) es un modelo de F que lo es de G.

Vamos a demostrar, por resolución, que F es consecuencia de G. Lo que equivale a probar que $\{F, \neg G\}$ es inconsistente. En primer lugar, calculamos las cláusulas,

- Fórmula 1:
$$\begin{array}{ll} & \forall x \exists y P(x,y) \\ \approx & \forall x P(x, f(x)) \\ \equiv & \{\{P(x, f(x))\}\} \end{array}$$

- Fórmula 2:
$$\begin{array}{ll} & \neg \exists y \forall x P(x,y) \\ \equiv & \forall y \exists x \neg P(x,y) \\ \approx & \forall y \neg P(x, f(x)) \\ \equiv & \{\{\neg P(x, f(x))\}\} \end{array}$$

La resolución es

1	$\{P(x, f(x))\}$	Premisa
2	$\{\neg P(x, f(x))\}$	Premisa
3	$\square$	Res. 1,2

Por tanto, S es inconsistente.

Ejercicio 2 *Demostrar por deducción natural:*

1. $(p \to r) \wedge (q \to r) \vdash (p \vee q) \to r$

2. $\forall x \forall y [P(y) \to Q(x)] \vdash \exists y P(y) \to \forall x Q(x)$

Solución:

Apartado 1.

1	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	Premisa
2	$p \vee q$	Supuesto
3	p	Supuesto
4	$p \to r$	$\wedge$e 1
5	r	$\to$e $4,3$
6	q	Supuesto
7	$q \to r$	$\wedge$e 1
8	r	$\to$e $7,6$
9	r	$\vee$e $2,3-5,6-8$
10	$(p \vee q) \to r$	$\to$i $2-9$

Apartado 2.

1	$\forall x \forall y [P(y) \to Q(x)]$	Premisa
2	$\exists y P(y)$	Supuesto
3	a	Supuesto
4	$P(b)$	Supuesto
5	$\forall y [P(y) \to Q(a)]$	$\forall$e 1
6	$P(b) \to Q(a)$	$\forall$e 5
7	$Q(a)$	$\to$e $6,4$
8	$Q(a)$	$\exists$e $2,4-7$
9	$\forall x Q(x)$	$\forall$i $3-8$
10	$\exists y P(y) \to \forall x Q(x)$	$\to$i $2-9$

Ejercicio 3 *Decidir, usando tableros semánticos, si las siguientes relaciones de consecuencia lógica son o no ciertas.*

1. $p \to (q \to r) \models r \to (q \to p)$.

2. $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x)\} \models \neg\forall x \neg Q(x)$.

En caso de que no lo sean, obtener del tablero un contramodelo que lo justifique.

Solución:

Apartado 1.

$$\begin{array}{lll} 1. & p \to (q \to r) & \\ 2. & \neg(r \to (q \to p)) & \\ 3. & r & (2) \\ 4. & \neg(q \to p) & (2) \\ 5. & q & (4) \\ 6. & \neg p & (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 7.\ \neg p\ \ (1) & 8.\ q \to r\ \ (1) \\ \text{Abierta} & \end{array}$$

La rama izquierda es abierta. Por tanto, no se da la relación de consecuencia y un contramodelo es I tal que $I(p) = 0$, $I(q) = 1$ e $I(r) = 1$.

Apartado 1.

$$\begin{array}{lll} 1. & \forall x(P(x) \to Q(x)) & \\ 2. & \exists x P(x) & \\ 3. & \neg\neg\forall x \neg Q(x) & \\ 4. & \forall x \neg Q(x) & (3) \\ 5. & P(a) & (2) \\ 6. & P(a) \to Q(a) & (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cllc} 7.\ \neg P(a)\ \ (6) & 8. & Q(a) & (6) \\ \text{Cerrada 5,7} & 9. & \neg Q(a) & (4) \\ & & Cerrada 8,9 & \end{array}$$

Por tanto, se cumple la relación de consecuencia.

Ejercicio 4 *Determinar, mediante resolución, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por resolución y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:*

1. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \neg\exists x P(x) \lor \forall x Q(x)$

2. $\{\exists x \forall y[\neg A(x,y) \to \exists z(Q(z) \lor P(z,y))], \forall x \exists y \neg A(x,y), \neg\exists x \exists y P(x,y), \neg\exists x Q(x)\}$ *es consistente*

Solución:

Apartado 1. En primer lugar, calculamos las cláusulas,

- Fórmula 1:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \equiv & \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ \equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}\} \end{array}$$

- Fórmula 2:

$$\begin{array}{rl} & \neg(\neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)) \\ \equiv & \neg(\neg \exists x P(x) \vee \forall y Q(y)) \\ \equiv & \neg\neg \exists x P(x) \wedge \neg \forall y Q(y) \\ \equiv & \exists x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y) \\ \equiv & \exists x(P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)) \\ \equiv & \exists x \exists y(P(x) \wedge \neg Q(y)) \\ \approx & \exists y(P(a) \wedge \neg Q(y)) \\ \approx & P(a) \wedge \neg Q(b) \\ \approx & \{\{P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\} \end{array}$$

La resolución es

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Premisa
2	$\{P(a)\}$	Premisa
3	$\{\neg Q(b)\}$	Premisa
4	$\{Q(a)\}$	Res. 1,2 $[x/a]$
5	$\{\neg P(b)\}$	Res. 1,3 $[x/b]$

Al saturarse sin encontrar la cláusula vacía, no se cumple la relación de consecuencia. Un contramodelo es la estructura con universo $U = \{a, b\}$ e interpretación I tal que $I(P) = \{a\}$ e $I(P) = \{a\}$.

Apartado 2. En primer lugar, calculamos las cláusulas,

- Fórmula 1:

$$\begin{array}{rl} & \exists x \forall y[\neg A(x,y) \to \exists z(Q(z) \vee P(z,y))] \\ \equiv & \exists x \forall y[\neg\neg A(x,y) \vee \exists z(Q(z) \vee P(z,y))] \\ \equiv & \exists x \forall y[A(x,y) \vee \exists z(Q(z) \vee P(z,y))] \\ \equiv & \exists x \forall y \exists z[A(x,y) \vee Q(z) \vee P(z,y)] \\ \approx & \forall y \exists z[A(a,y) \vee Q(z) \vee P(z,y)] \\ \approx & \forall y[A(a,y) \vee Q(f(y)) \vee P(f(y),y)] \\ \equiv & \{\{A(a,y), Q(f(y)), P(f(y),y)\}\} \end{array}$$

- Fórmula 2:

$$\begin{array}{rl} & \forall x \exists y \neg A(x,y) \\ \approx & \forall x \neg A(x, g(x)) \\ \equiv & \{\{\neg A(x, g(x))\}\} \end{array}$$

- Fórmula 3:

$$\begin{array}{rl} & \neg \exists x \exists y P(x,y) \\ \equiv & \neg \exists x \exists y P(x,y) \\ \equiv & \forall x \forall y \neg P(x,y) \\ \equiv & \{\{\neg P(x,y)\}\} \end{array}$$

- Fórmula 4:

$$\begin{array}{ll} & \neg\exists x Q(x) \\ \equiv & \forall x \neg Q(x) \\ \equiv & \{\{\neg Q(x)\}\} \end{array}$$

La resolución es

1	$\{A(a,y), Q(f(y)), P(f(y),y)\}$	Premisa
2	$\{\neg A(x,g(x))\}$	Premisa
3	$\{\neg P(x,y)\}$	Premisa
4	$\{\neg Q(x)\}$	Premisa
5	$\{A(a,y), Q(f(y))\}$	Res. 1,3 $[x/f(y)]$
6	$\{A(a,y)\}$	Res. 5,4 $[x/f(y)]$
7	$\square$	Res. 6,2 $[x/a, y/g(a)]$

Al obtenerse la cláusula vacía, el conjunto es inconsistente.