Ejercicio 1 *[2 puntos] Probar mediante deducción natural*
$\vdash (p \to \neg q) \wedge (p \to \neg r) \to (p \to \neg(q \vee r))$

Solución:

1	$(p \to \neg q) \wedge (p \to \neg r)$	supuesto
2	p	supuesto
3	$q \vee r$	supuesto
4	q	supuesto
5	$p \to \neg q$	$\wedge$e 1
6	$\neg q$	$\to$e 5, 2
7	$\perp$	$\neg$e 4, 6
8	r	supuesto
9	$p \to \neg r$	$\wedge$e 1
10	$\neg r$	$\to$e 9, 8
11	$\perp$	$\neg$e 8, 10
12	$\perp$	$\vee$e 3, 4 − 7, 8 − 11
13	$\neg(q \vee r)$	$\neg$i 3 − 12
14	$p \to \neg(q \vee r)$	$\to$i 2 − 13
15	$(p \to \neg q) \wedge (p \to \neg r) \to (p \to \neg(q \vee r))$	$\to$i 1 − 14

Ejercicio 2 *[2 puntos] Decidir, mediante tablero semántico, si*
$\{r \to \neg(p \wedge \neg q),\ ((p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)) \wedge \neg r\} \models q$
En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Solución:
El tablero es

1. $r \to \neg(p \land \neg q)$]
2. $((p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)) \land \neg r$
3. $\neg q$
4. $(p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)$ (2)
5. $\neg r$ (2)

6. $\neg(p \to r)$ (4) — 7. $\neg q \leftrightarrow r$ (4)

8. p (6)
9. $\neg r$ (6)

10. $\neg r$ (1) — 11. $\neg(p \land \neg q)$ (1)

Abierta

$\{p, \neg q, \neg r\}$

Puesto que el tablero tiene una rama abierta, resulta que

$$\{r \to \neg(p \land \neg q),\ ((p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)) \land \neg r\} \not\models q$$

Un contramodelo es la valoración v tal que $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ y $v(r) = 0$.

Ejercicio 3 *[2 puntos] Decidir, mediante resolución, si*

$$\models (\exists x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall x)(\forall y)[Q(y) \to P(x,y)]]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar se calcula una forma clausal de la negación de la fórmula.

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall x)(\forall y)[Q(y) \to P(x,y)]] \\
\equiv & \neg(\exists x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall u)(\forall v)[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)\neg[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to (\forall u)(\forall v)[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \land \neg(\forall u)(\forall v)[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \land (\exists u)(\exists v)\neg[Q(v) \to P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)[(\forall y)[P(x,y) \lor \neg Q(y)] \land (\exists u)(\exists v)[Q(v) \land \neg P(u,v)]] \\
\equiv & (\forall x)(\exists u)(\exists v)(\forall y)[(P(x,y) \lor \neg Q(y)) \land (Q(v) \land \neg P(u,v))] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[(P(x,y) \lor \neg Q(y)) \land (Q(g(x)) \land \neg P(f(x),g(x)))] \\
\equiv & \{\{P(x,y), \neg Q(y)\}, \{Q(g(x))\}, \{\neg P(f(x),g(x))\}\}
\end{array}$$

La demostración por resolución es

1	$\{P(x,y), \neg Q(y)\}$	
2	$\{Q(g(x))\}$	
3	$\{\neg P(f(x), g(x))\}$	
4	$\{P(x, g(z))\}$	Res. de 1 y $2[x/z]$ con $\sigma = [y/g(z)]$
5	$\square$	Res. de $3[x/u]$ y 4 con $\sigma = [x/f(u), z/u]$

Ejercicio 4 *[2 puntos] Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*

$\forall x \exists y Q(x,y)$

es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas

$\{\exists y \forall x P(x,y),\ \forall x \forall y(\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))\}$

En el caso de que no lo sea, dar un contramodelo.

Solución:

1.	$\exists y \forall x P(x,y)$	g
2.	$\forall x \forall y(\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))$	
3.	$\neg \forall x \exists y Q(x,y)$	
4.	$\forall x P(x,a)$	(1)
5.	$\neg \exists y Q(b,y)$	(3)
6.	$\neg Q(b,a)$	(5)
7.	$P(b,a)$	(4)
8.	$\forall y(\neg Q(b,y) \to \neg P(b,y))$	(2)
9.	$\neg Q(b,a) \to \neg P(b,a))$	(8)

10. $\neg\neg Q(b,a)$ (9)	11. $\neg P(b,a)$ (9)
Cerrada 10,6	Cerrada 11,7

Ejercicio 5 *[2 puntos] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Si F es una fórmula satisfacible, entonces todas las subfórmulas de F son satisfacibles.*
2. *Existen fórmulas válidas tales que todas sus subfórmulas son válidas.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es falsa. Un contraejemplo es la fórmula $F := \neg(p \land \neg p)$. La fórmula F es satisfacible (de hecho, F es válida) y la subfórmula $p \land \neg p$ de F no es satisfacible.

Solución del apartado 2: La proposición es falsa ya que toda fórmula tiene alguna subfórmula atómica y para cada fórmula atómica existe alguna interpretación en la que no se verifica.