Lógica informática (2015–16)

Tema 4: Formas normales

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 4: Formas normales

1. Forma normal conjuntiva

2. Forma normal disyuntiva

3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos

Tema 4: Formas normales

Forma normal conjuntiva

- Átomos y literales:
  - Def.: Un átomo es una variable proposicional (p.e. $p, q, \dots$).
  - Def.: Un literal es un átomo o su negación (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
  - Notación: $L, L_1, L_2, \dots$ representarán literales.
- Forma normal conjuntiva:
  - Def.: Una fórmula está en forma normal conjuntiva (FNC) si es una conjunción de disyunciones de literales; es decir, es de la forma $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$.
  - Ejemplos: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ está en FNC.
    $(\neg p \vee q) \wedge (q \to p)$ no está en FNC.
  - Def.: Una fórmula G es una forma normal conjuntiva (FNC) de la fórmula F si G está en forma normal conjuntiva y es equivalente a F.
  - Ejemplo: Una FNC de $\neg(p \wedge (q \to r))$ es $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$.

Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva

Algoritmo: Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal conjuntiva de F, FNC(F):

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A) \tag{1}$$
2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
$$A \to B \equiv \neg A \lor B \tag{2}$$
3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
$$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B \tag{3}$$
$$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B \tag{4}$$
$$\neg\neg A \equiv A \tag{5}$$
4. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias
$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C) \tag{6}$$
$$(A \land B) \lor C \equiv (A \lor C) \land (B \lor C) \tag{7}$$

Ejemplos de cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $\neg(p \land (q \rightarrow r))$:

$$\begin{array}{lll} & \neg(p \land (q \rightarrow r)) & \\ \equiv & \neg(p \land (\neg q \lor r)) & [\text{por } (2)] \\ \equiv & \neg p \lor \neg(\neg q \lor r) & [\text{por } (3)] \\ \equiv & \neg p \lor (\neg\neg q \land \neg r) & [\text{por } (4)] \\ \equiv & \neg p \lor (q \land \neg r) & [\text{por } (5)] \\ \equiv & (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg r) & [\text{por } (6)] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p)$:

$$\begin{array}{lll} & (p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p) & \\ \equiv & (\neg p \lor q) \lor (\neg q \lor p) & [\text{por } (2)] \\ \equiv & \neg p \lor q \lor \neg q \lor p & \end{array}$$

Cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:

$$
\begin{array}{cl}
 & (p \leftrightarrow q) \rightarrow r \\
\equiv & (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p) \rightarrow r \\
\equiv & \neg((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)) \lor r \\
\equiv & \neg((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)) \lor r \\
\equiv & (\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor p)) \lor r \\
\equiv & ((\neg\neg p \land \neg q) \lor (\neg\neg q \land \neg p)) \lor r \\
\equiv & ((p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)) \lor r \\
\equiv & (((p \land \neg q) \lor q) \land ((p \land \neg q) \lor \neg p)) \lor r \\
\equiv & (((p \lor q) \land (\neg q \lor q)) \land ((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p))) \lor r \\
\equiv & (((p \lor q) \land (\neg q \lor q)) \lor r) \land (((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)) \lor r) \\
\equiv & (((p \lor q) \lor r) \land ((\neg q \lor q) \lor r)) \land (((p \lor \neg p) \lor r) \land ((\neg q \lor \neg p) \lor r)) \\
\equiv & (p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor q \lor r) \land (p \lor \neg p \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r) \\
\equiv & (p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r)
\end{array}
$$

Procedimiento de decisión de validez mediante FNC

- Literales complementarios:
  - El complementario de un literal L es $L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$
- Propiedades de reducción de tautologías:
  - $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ es una tautología syss $F_1, \dots, F_n$ lo son.
  - $L_1 \vee \cdots \vee L_n$ es una tautología syss $\{L_1, \dots, L_n\}$ contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen i, j tales que $L_i = L_j^c$).
- Algoritmo de decisión de tautologías mediante FNC
  - Entrada: Una fórmula F.
  - Procedimiento:
    1. Calcular una FNC de F.
    2. Decidir si cada una de las disyunciones de la FNC tiene algún par de literales complementarios.

Ejemplos de decisión de validez mediante FNC

- $\neg(p \land (q \to r))$ no es tautología:
  $\text{FNC}(\neg(p \land (q \to r))) = (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg r)$
  Contramodelos de $\neg(p \land (q \to r))$:
  I_1 tal que $I_1(p) = 1$ y $I_1(q) = 0$
  I_2 tal que $I_2(p) = 1$ y $I_2(r) = 1$
- $(p \to q) \lor (q \to p)$ es tautología:
  $\text{FNC}((p \to q) \lor (q \to p)) = \neg p \lor q \lor \neg q \lor p$
- $(p \leftrightarrow q) \to r$ no es tautología:
  $\text{FNC}((p \leftrightarrow q) \to r) = (p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r)$
  Contramodelos de $(p \leftrightarrow q) \to r$:
  I_1 tal que $I_1(p) = 0, I_1(q) = 0$ y $I_1(r) = 0$
  I_2 tal que $I_2(p) = 1, I_2(q) = 1$ y $I_2(r) = 0$

Tema 4: Formas normales

Definición de forma normal disyuntiva

- Def.: Una fórmula está en forma normal disyuntiva (FND) si es una disyunción de conjunciones de literales; es decir, es de la forma
  $(L_{1,1} \land \dots \land L_{1,n_1}) \lor \dots \lor (L_{m,1} \land \dots \land L_{m,n_m})$.
- Ejemplos: $(\neg p \land q) \lor (\neg q \land p)$ está en FND.
  $(\neg p \land q) \lor (q \to p)$ no está en FND.
- Def.: Una fórmula G es una forma normal disyuntiva (FND) de la fórmula F si G está en forma normal disyuntiva y es equivalente a F.
- Ejemplo: Una FND de $\neg(p \land (q \to r))$ es $\neg p \lor (q \land \neg r)$.

Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva

Algoritmo: Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal disyuntiva de F, FND(F):

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A) \tag{1}$$
2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
$$A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B \tag{2}$$
3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
$$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B \tag{3}$$
$$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B \tag{4}$$
$$\neg\neg A \equiv A \tag{5}$$
4. Interiorizar las conjunciones usando las equivalencias
$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C) \tag{6}$$
$$(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C) \tag{7}$$

Ejemplos de cálculo de forma normal disyuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(p \land (q \rightarrow r))$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(p \land (q \rightarrow r)) & \\
\equiv & \neg(p \land (\neg q \lor r)) & [\text{por } (2)] \\
\equiv & \neg p \lor \neg(\neg q \lor r) & [\text{por } (3)] \\
\equiv & \neg p \lor (\neg\neg q \land \neg r) & [\text{por } (4)] \\
\equiv & \neg p \lor (q \land \neg r) & [\text{por } (5)]
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(\neg p \lor \neg q \rightarrow \neg(p \land q))$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\neg p \lor \neg q \rightarrow \neg(p \land q)) & \\
\equiv & \neg(\neg(\neg p \lor \neg q) \lor \neg(p \land q)) & [\text{por } (2)] \\
\equiv & \neg\neg(\neg p \lor \neg q) \land \neg\neg(p \land q) & [\text{por } (4)] \\
\equiv & (\neg p \lor \neg q) \land (p \land q) & [\text{por } (5)] \\
\equiv & (\neg p \land (p \land q)) \lor (\neg q \land (p \land q)) & [\text{por } (7)] \\
\equiv & (\neg p \land p \land q) \lor (\neg q \land p \land q) &
\end{array}
$$

Procedimiento de decisión de satisfacibilidad mediante FND

- Propiedades de reducción de satisfacibilidad:
  - $F_1 \lor \cdots \lor F_n$ es satisfacible syss alguna de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ lo es.
  - $L_1 \land \cdots \land L_n$ es satisfacible syss $\{L_1, \dots, L_n\}$ no contiene ningún par de literales complementarios.
- Algoritmo de decisión de satisfacibilidad mediante FND:
  - Entrada: Una fórmula F.
  - Procedimiento:
    1. Calcular una FND de F.
    2. Decidir si alguna de las conjunciones de la FND no tiene un par de literales complementarios.

Ejemplos de decisión de satisfacibilidad mediante FND

- $\neg(p \land (q \to r))$ es satisfacible:
  $\text{FND}(\neg(p \land (q \to r))) = \neg p \lor (q \land \neg r)$
  Modelos de $\neg(p \land (q \to r))$:
  I_1 tal que $I_1(p) = 0$
  I_2 tal que $I_2(q) = 1$ y $I_2(r) = 0$
- $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$ es insatisfacible:
  $\text{FND}(\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))) = (\neg p \land p \land q) \lor (\neg q \land p \land q)$

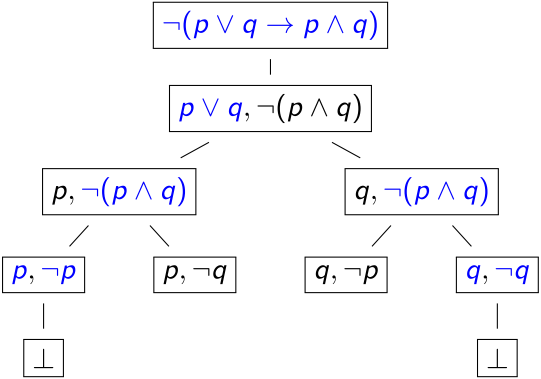
Tema 4: Formas normales

Forma normal disyuntiva por tableros

- Prop.: Sea F una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de $\{F\}$ son $\{L_{1,1},\dots,L_{1,n_1}\},\dots,\{L_{m,1},\dots,L_{m,n_m}\}$, entonces una forma normal disyuntiva de F es $(L_{1,1}\wedge\dots\wedge L_{1,n_1})\vee\dots\vee(L_{m,1}\wedge\dots\wedge L_{m,n_m})$.

Forma normal disyuntiva por tableros

- Ejemplo: Forma normal disyuntiva de $\neg(p \lor q \to p \land q)$.



Una forma normal disyuntiva de $\neg(p \lor q \to p \land q)$ es $(p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)$.

Forma normal conjuntiva por tableros

- Prop.: Sea F una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de $\{\neg F\}$ son $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$, entonces una forma normal conjuntiva de F es $(L^c_{1,1} \lor \dots \lor L^c_{1,n_1}) \land \dots \land (L^c_{m,1} \lor \dots \lor L^c_{m,n_m})$.
- Ejemplo: Forma normal conjuntiva de $p \lor q \to p \land q$.
  - Un árbol completo $\neg(p \lor q \to p \land q)$ está en la transparencia anterior.
  - Una forma normal disyuntiva de $\neg(p \lor q \to p \land q)$ es $(p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)$.
  - Una forma normal conjuntiva de $p \lor q \to p \land q$ es $(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$.

$$\begin{aligned}
p \lor q \to p \land q &\equiv \neg\neg(p \lor q \to p \land q) \\
&\equiv \neg((p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)) \\
&\equiv \neg(p \land \neg q) \land \neg(q \land \neg p)) \\
&\equiv (\neg p \lor \neg\neg q) \land (\neg q \lor \neg\neg p)) \\
&\equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p))
\end{aligned}$$

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000)

   Cap. 8 (Equivalencia lógica) y 10 (Formas normales).

2. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001)

   Cap. 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).

3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)

   Cap. 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).

4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000)

   Cap. 1 (Propositional logic).

5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

   Cap. 4.4 (Formas normales).