Soluciones del examen de *Lógica informática* del 12 de noviembre de 2015

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 12 de noviembre de 2015

Ejercicio 1 *Demostrar o refutar razonadamente las siguientes afirmaciones:*

1. *Si S es un conjunto inconsistente de fórmulas y $F \in S$, entonces $S - \{F\}$ es inconsistente.*
2. *Si S es un conjunto inconsistente de fórmulas y $F \in S$ es una tautología, entonces $S - \{F\}$ es inconsistente.*
3. *Si S es un conjunto consistente de fórmulas, entonces $S \cup \{F\}$ es consistente.*
4. *Si S es un conjunto consistente de fórmulas y F es una tautología entonces $S \cup \{F\}$ es consistente.*

Solución:

1. Es falsa. Por ejemplo, si $S = \{p, \neg p\}$ y $F = p$, entonces S es inconsistente, $F \in S$ pero $S - \{F\} = \{\neg p\}$ es consistente.

2. Es verdadera. Se demuestra por reducción al absurdo: Supongamos que $S - \{F\}$ es consistente, entonces existe un modelo I de $S - \{F\}$. Además, como F es una tautología, $I(F) = 1$. Por tanto I es un modelo de S y S es consistente.

3. Es falsa. Por ejemplo, si $S = \{\neg p\}$ y $F = p$, entonces S es consistente, pero $S \cup \{F\}$ es inconsistente.

4. Es verdadera, ya que si S es consistente, entonces existe un modelo I de S. Además, como F es una tautología, $I(F) = 1$. Por tanto I es un modelo de $S \cup \{F\}$ y $S \cup \{F\}$ es consistente.

Ejercicio 2 *Demostrar usando las reglas de deducción natural*

$$\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$$

Solución:

1	$p \to q$	supuesto
2	$\neg p \to q$	supuesto
3	$\neg q$	supuesto
4	$\neg p$	MT $1,3$
5	q	$\to$e $2,4$
6	$\bot$	$\neg$e $3,5$
7	q	RAA $3-6$
8	$(\neg p \to q) \to q$	$\to$i $2-7$
9	$(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$	$\to$i $1-8$

Ejercicio 3 *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula siguiente es una tautología*

$$(q \to r) \to ((p \lor q) \to (p \lor r))$$

En caso de no serlo, proporcionar un contramodelo de la misma.

Solución:

1.	$\neg((q \to r) \to ((p \lor q) \to (p \lor r)))$	
2.	$q \to r$	(1)
3.	$\neg((p \lor q) \to (p \lor r))$	(1)
4.	$p \lor q$	(3)
5.	$\neg(p \lor r)$	(3)
6.	$\neg p$	(5)
7.	$\neg r$	(5)

8. p (4) Cerrada 8 y 6

9. q (4)

    10. $\neg q$ (2) Cerrada 10 y 9

    11. r (2) Cerrada 11 y 7

Al tener todas las ramas cerradas, la fórmula es una tautología.

Ejercicio 4 *Decidir, mediante resolución, si la fórmula $p \to r \land s$ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $S = \{p \lor q \to r \lor s, \neg(p \land \neg r \land s)\}$. Si no lo es, proporcionar una interpretación que lo justifique.*

Solución:

En primer lugar se calcula su forma clausal. La de la primera fórmula es

$$\begin{array}{rl} & p \lor q \to r \lor s \\ \equiv & \neg(p \lor q) \lor (r \lor s) \\ \equiv & (\neg p \land \neg q) \lor (r \lor s) \\ \equiv & (\neg p \lor r \lor s) \land (\neg q \lor r \lor s) \\ \equiv & \{\{\neg p, r, s\}, \{\neg q, r, s\}\} \end{array}$$

La de la segunda fórmula es

$$\begin{array}{rl} & \neg(p \land \neg r \land s) \\ \equiv & \neg p \lor \neg(\neg r \land s)) \\ \equiv & \neg p \lor (\neg\neg r \lor \neg s) \\ \equiv & \neg p \lor (r \lor \neg s) \\ \equiv & \{\{\neg p, r, \neg s\}\} \end{array}$$

La de la negación de la conclusión

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(p \to r \land s) \\
\equiv & p \land \neg(r \land s) \\
\equiv & p \land (\neg r \lor \neg s) \\
\equiv & \{\{p\}, \{\neg r, \neg s\}\}
\end{array}
$$

La resolución es

$$
\begin{array}{lll}
1. & \{\neg p, r, s\} & \\
2. & \{\neg q, r, s\} & \\
3. & \{\neg p, r, \neg s\} & \\
4. & \{p\} & \\
5. & \{\neg r, \neg s\} & \\
6. & \{r, s\} & \text{de 1 y 4} \\
7. & \{r, \neg s\} & \text{de 3 y 4} \\
8. & \{\neg s\} & \text{de 5 y 7} \\
9. & \{r\} & \text{de 6 y 8}
\end{array}
$$

Durante la resolución las siguientes cláusulas están subsumidas: la 1 (por la 6), la 3 (por la 7), la 5 (por la 8), la 7 (por la 8), la 2 (por la 9) y la 6 (por la 9).

Como no se llega a la cláusula vacía, no es consecuencia y un contramodelo es I tal que $I(p) = I(r) = 1, I(s) = 0$.

Ejercicio 5 *Decidir, usando el algoritmo DPLL, si el conjunto de cláusulas*

$$\{\{p, r, \neg s\}, \{\neg q, s\}, \{\neg p, \neg s, \neg r\}, \{\neg p, s, q\}, \{s, q, p\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg s, \neg r, p\}\}$$

es consistente. En caso de que lo sea, proporcionar un modelo del mismo.

Solución:

Como el conjunto no tiene cláusulas unitarias ni literales puros. Elegimos el literal p para dividir los casos.

Primer caso:

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & S \cup \{p\} & & & & & & & & \\
= & \{\{p, r, \neg s\}, & \{\neg q, s\}, & \{\neg p, \neg s, \neg r\}, & \{\neg p, s, q\}, & \{s, q, p\}, & \{\neg q, \neg r\}, & \{\neg s, \neg r, p\}, & \{p\} & \} \quad [\text{Unit } p] \\
\approx & \{ & \{\neg q, s\}, & \{\neg s, \neg r\}, & \{s, q\}, & & \{\neg q, \neg r\}, & & & \} \quad [\text{Puro } \neg r] \\
\approx & \{ & \{\neg q, s\}, & & \{s, q\}, & & & & & \} \quad [\text{Puro } s] \\
\approx & \{ & & & & & & & & \}
\end{array}
$$

Por tanto, S es consistente y un modelo es la interpretación I con $I(p) = 1, I(r) = 0$ e $I(s) = 1$.