Ejercicio 1 *Demostrar por deducción natural que:*

$$\{\exists y \forall x P(x,y),\ \forall x \forall y(\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))\} \models \forall x \exists y Q(x,y)$$

Solución:

La demostración es

1	$\exists y \forall x P(x,y)$	*premisa*
2	$\forall x \forall y(\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))$	*premisa*
3	a	*supuesto*
4	$b,\ \forall x P(x,b)$	*supuesto*
5	$P(a,b)$	$\forall$e 4
6	$\neg\neg P(a,b)$	$\neg\neg$i 5
7	$\forall y(\neg Q(a,y) \to \neg P(a,y))$	$\forall$e 2
8	$\neg Q(a,b) \to \neg P(a,b)$	$\forall$e 7
9	$\neg\neg Q(a,b)$	MT $8,6$
10	$Q(a,b)$	$\neg\neg$e 9
11	$\exists y Q(a,y)$	$\exists$i 10
12	$\exists y Q(a,y)$	$\exists$e $1, 4-11$
13	$\forall x \exists y Q(x,y)$	$\forall$i $3-12$

Ejercicio 2 *Decidir, usando tableros semánticos, si la fórmula*

$$\neg(\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x)))$$

es satisfacible y, en el caso de que lo sea, obtener un modelo a partir del tablero.

Solución:

El tablero de la fórmula es

$$
\begin{array}{lll}
1. & \neg(\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))) & \\
2. & \exists x(P(x) \to Q(x)) & (1) \\
3. & \neg(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) & (1) \\
4. & \exists x P(x) & (3) \\
5. & \neg \exists x Q(x) & (3) \\
6. & P(a) & (4) \\
7. & P(b) \to Q(b) & (2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll|l}
8. & \neg P(b) & (7) & 9.\ Q(b) \ \ (7) \\
10. & \neg Q(a) & (3a) & \\
11. & \neg Q(b) & (3b) & \\
 & \text{Abierta} & &
\end{array}
$$

Como tiene una rama abierta, la fórmula es satisfacible. Un modelos obtenido a partir del tablero es (U, I) tal que $U = \{a, b\}$, $I(P) = \{a\}$, $I(Q) = \emptyset$.

Ejercicio 3 *Decidir, mediante resolución, si la fórmula*

$$\forall x(E(x) \land \neg P(x) \to \exists y(A(y) \land I(y, x)))$$

es consecuencia lógica de las fórmulas

$$\exists x(M(x) \land E(x) \land \forall y(I(y, x) \to M(y)))$$

$$\forall x(M(x) \to \neg P(x))$$

Solución:

Para hacer la resolución, en primer lugar se calculan las formas clausales de las premisas y de la negación de la conclusión:

$$
\begin{array}{ll}
 & \exists x(M(x) \land E(x) \land \forall y(I(y, x) \to M(y))) \\
\equiv & \exists x(M(x) \land E(x) \land \forall y(\neg I(y, x) \lor M(y))) \\
\equiv & \exists x \forall y(M(x) \land E(x) \land (\neg I(y, x) \lor M(y))) \\
\equiv_{sat} & \forall y(M(a) \land E(a) \land (\neg I(y, a) \lor M(y))) \\
\equiv & \{\{M(a)\}, \{E(a)\}, \{\neg I(y, a), M(y)\}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \forall x(M(x) \to \neg P(x)) \\
\equiv & \forall x(\neg M(x) \lor \neg P(x)) \\
\equiv & \{\{\neg M(x), \neg P(x)\}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x(E(x) \land \neg P(x) \to \exists y(A(y) \land I(y,x)))) \\
\equiv & \exists x \neg(E(x) \land \neg P(x) \to \exists y(A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \exists x(E(x) \land \neg P(x) \land \neg \exists y(A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \exists x(E(x) \land \neg P(x) \land \forall y \neg(A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \exists x(E(x) \land \neg P(x) \land \forall y(\neg A(y) \lor \neg I(y,x))) \\
\equiv & \exists x \forall y(E(x) \land \neg P(x) \land (\neg A(y) \lor \neg I(y,x))) \\
\approx & \forall y(E(b) \land \neg P(b) \land (\neg A(y) \lor \neg I(y,b))) \\
\equiv & \{\{E(b)\},\{\neg P(b)\},\{\neg A(y),\neg I(y,b)\}\}
\end{array}
$$

La resolución es

1	$\{M(a)\}$	Premisa
2	$\{E(a)\}$	Premisa
3	$\{\neg I(y,a), M(y)\}$	Premisa
4	$\{\neg M(x), \neg P(x)\}$	Premisa
5	$\{E(b)\}$	Premisa
6	$\{\neg P(b)\}$	Premisa
7	$\{\neg A(y), \neg I(y,b)\}$	Premisa
8	$\{\neg P(a)\}$	Resolvente de 1.1 y 4.1 con $\sigma = [x/a]$
9	$\{\neg I(x,a), \neg P(x)\}$	Resolvente de 3.2 y 4.1 con $\sigma = [y/x]$

Como no se alcanza la cláusula vacía, la fórmula no es consecuencia. Un contramodelo es (U,I) con $U = \{a,b\}$, $I(M) = \{a\}$, $I(E) = \{a,b\}$, $I(I) = \emptyset$, $I(P) = \emptyset$ y $I(A) = \emptyset$

Ejercicio 4 *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Para toda fórmula F y toda fórmula G, se tiene $(\exists x)[F \land G] \equiv (\exists x)F \land (\exists x)G$.*

2. *Para ninguna fórmula F y ninguna fórmula G, se tiene $(\exists x)[F \land G] \equiv (\exists x)F \land (\exists x)G$.*

Solución:

Apartado 1 Es falso como se observa tomando como F la fórmula $P(x)$ y como G la fórmula $Q(x)$. Entonces $(\exists x)[F \land G] \not\equiv (\exists x)F \land (\exists x)G$ ya que hay interpretaciones en las que se verifica $(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$ y no se verifica $(\exists x)[P(x) \land Q(x)]$. Por ejemplo, (U,I) con $U = \{0,1\}$, $I(P) = \{0\}$ y $I(Q) = \{1\}$.

Apartado 2 Es falso como se observa tomando como F y G la misma fórmula. Otro contraejemplo consiste en tomar como F ó G una fórmula en la que no ocurra la variable x.