Lógica matemática y fundamentos (2011–12)

Tema 10: Modelos de Herbrand

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 10: Modelos de Herbrand

Tema 10: Modelos de Herbrand

Reducción de la LPO básica a proposicional

- Observación:
  - En este tema sólo se consideran lenguajes de primer orden sin igualdad.
- Reducción de la LPO básica a proposicional
  - Def.: Una fórmula básica es una fórmula sin variables ni cuantificadores.
  - Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
    1. S es consistente en el sentido de la lógica de primer orden.
    2. S es consistente en el sentido de la lógica proposicional.

Ejemplos de reducción de la LPO básica a proposicional

- $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c)\}$
  es consistente en el sentido de la lógica de primer orden.

- $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c), \neg P(c)\}$
  es inconsistente en el sentido de la lógica de primer orden.

	P^I	$P(a) \lor P(b)$	$\neg P(b) \lor P(c)$	$P(a) \to P(c)$	$\neg P(c)$
$\mathcal{I}_1$	$\emptyset$	0	1	1	1
$\mathcal{I}_2$	$\{c^I\}$	0	1	1	0
$\mathcal{I}_3$	$\{b^I\}$	1	0	1	1
$\mathcal{I}_4$	$\{b^I, c^I\}$	1	1	1	0
$\mathcal{I}_5$	$\{a^I\}$	1	1	0	1
$\mathcal{I}_6$	$\{a^I, c^I\}$	1	1	1	0
$\mathcal{I}_7$	$\{a^I, b^I\}$	1	0	0	1
$\mathcal{I}_8$	$\{a^I, b^I, c^I\}$	1	1	1	0

Ejemplos de reducción de la LPO básica a proposicional

- $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c)\}$ es consistente en el sentido proposicional (con modelos $\mathcal{I}_4, \mathcal{I}_6, \mathcal{I}_8$).
- $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c), \neg P(c)\}$ es inconsistente en el sentido proposicional.

  Se consideran los cambios $P(a)/p, P(b)/q, P(c)/r$

	p	q	r	$p \lor q$	$\neg q \lor r$	$p \to r$	$\neg r$
$\mathcal{I}_1$	0	0	0	0	1	1	1
$\mathcal{I}_2$	0	0	1	0	1	1	0
$\mathcal{I}_3$	0	1	0	1	0	1	1
$\mathcal{I}_4$	0	1	1	1	1	1	0
$\mathcal{I}_5$	1	0	0	1	1	0	1
$\mathcal{I}_6$	1	0	1	1	1	1	0
$\mathcal{I}_7$	1	1	0	1	0	0	1
$\mathcal{I}_8$	1	1	1	1	1	1	0

Notación

- L representa un lenguaje de primer orden sin igualdad.
- $\mathcal{C}$ es el conjunto de constantes de L.
- $\mathcal{F}$ es el conjunto de símbolos de función de L.
- $\mathcal{R}$ es el conjunto de símbolos de relación de L.
- $\mathcal{F}_n$ es el conjunto de símbolos de función n–aria de L.
- $\mathcal{R}_n$ es el conjunto de símbolos de relación n–aria de L.
- f/n indica que f es un símbolo de función n–aria de L.
- P/n indica que f es un símbolo de relación n–aria de L.

Universo de Herbrand

- Def.: El universo de Herbrand de L es el conjunto de los términos básicos de L. Se representa por $\text{UH}(L)$.
- Prop.: $\text{UH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} H_i(L)$, donde $H_i(L)$ es el nivel i del $\text{UH}(L)$ definido por

$$
\begin{aligned}
H_0(L) &= \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{si } \mathcal{C} \neq \emptyset; \\ \{a\}, & \text{en caso contrario. (} a \text{ es una nueva constante).} \end{cases} \\
H_{i+1}(L) &= H_i(L) \cup \{f(t_1, \dots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in H_i(L)\}
\end{aligned}
$$

- Prop.: $\text{UH}(L)$ es finito syss L no tiene símbolos de función.

Ejemplos de universo de Herbrand

- Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{F} = \emptyset$, entonces

$$\begin{array}{ll} H_0(L) & = \{a, b, c\} \\ H_1(L) & = \{a, b, c\} \\ \vdots & \\ \mathrm{UH}(L) & = \{a, b, c\} \end{array}$$

- Si $\mathcal{C} = \emptyset$ y $\mathcal{F} = \{f/1\}$, entonces

$$\begin{array}{ll} H_0(L) & = \{a\} \\ H_1(L) & = \{a, f(a)\} \\ H_2(L) & = \{a, f(a), f(f(a))\} \\ \vdots & \\ \mathrm{UH}(L) & = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

Ejemplos de universo de Herbrand

- Si $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/1, g/1\}$, entonces

$$\begin{array}{ll} H_0(L) & = \{a, b\} \\ H_1(L) & = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\} \\ H_2(L) & = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), \quad f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)), \\ & \qquad g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b)) \} \\ \vdots & \end{array}$$

- Si $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/2\}$, entonces

$$\begin{array}{ll} H_0(L) & = \{a, b\} \\ H_1(L) & = \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b)\} \\ H_2(L) & = \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b), f(a, f(a, a)), f(a, f(a, b)), \dots \\ \vdots & \end{array}$$

Base de Herbrand

- Def.: La base de Herbrand de L es el conjunto de los átomos básicos de L. Se representa por $\text{BH}(L)$.
- Prop.: $\text{BH}(L) = \{P(t_1, \dots, t_n) : P \in \mathcal{R}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in \text{UH}(L)\}$.
- Prop.: $\text{BH}(L)$ es finita syss L no tiene símbolos de función.
- Ejemplos:
  - Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{R} = \{P/1\}$, entonces
    $$\begin{aligned} \text{UH}(L) &= \{a, b, c\} \\ \text{BH}(L) &= \{P(a), P(b), P(c)\} \end{aligned}$$
  - Si $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{F} = \{f/1\}$ y $\mathcal{R} = \{P/1, Q/1, R/1\}$, entonces
    $$\begin{aligned} \text{UH}(L) &= \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\} \\ \text{BH}(L) &= \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\} \end{aligned}$$

Interpretaciones de Herbrand

- Def.: Una interpretación de Herbrand es una interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que
  - U es el universo de Herbrand de L;
  - $I(c) = c$, para cada constante c de L;
  - $I(f) = f$, para cada símbolo de función f de L.
- Prop.: Sea $\mathcal{I}$ una interpretación de Herbrand de L. Si t es un término básico de L, entonces $\mathcal{I}(t) = t$.
- Prop.: Una interpretación de Herbrand queda determinada por un subconjunto de la base de Herbrand, el conjunto de átomos básicos verdaderos en esa interpretación.

Modelos de Herbrand

- Nota: Las definiciones de universo de Herbrand, base de Herbrand e interpretación de Herbrand definidas para un lenguaje se extienden a fórmulas y conjuntos de fórmulas considerando el lenguaje formado por los símbolos no lógicos que aparecen.
- Def.: Un modelo de Herbrand de una fórmula F es una interpretación de Herbrand de F que es modelo de F.
- Def.: Un modelo de Herbrand de un conjunto de fórmulas S es una interpretación de Herbrand de S que es modelo de S.
- Ejemplo: Los modelos de Herbrand de $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c)\}$ son $\{P(b), P(c)\}, \{P(a), P(c)\}$ y $\{P(a), P(b), P(c)\}$ (ver página 5).
- Ejemplo: Sea $S = \{\forall x\, \forall y\, [Q(b,x) \to P(a) \lor R(y)], P(b) \to \neg\exists z\, \exists u\, Q(z,u)\}$.
  Entonces,
  $$\begin{aligned} \mathrm{UH}(S) &= \{a, b\} \\ \mathrm{BH}(S) &= \{P(a), P(b), Q(a,a), Q(a,b), Q(b.a), Q(b,b), R(a), R(b)\} \end{aligned}$$
  Un modelo de Herbrand de S es $\{P(a)\}$.

Tema 10: Modelos de Herbrand

Interpretación de Herbrand de una interpretación

Sea $S = \{\{\neg Q(b,x), P(a), R(y)\}, \{\neg P(b), \neg Q(z,u)\}\}$ e
$\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $a^I = 1$, $b^I = 2$, $P^I = \{1\}$, $Q^I = \{(1,1),(2,2)\}$,
$R^I = \{2\}$. Entonces, $\mathcal{I} \models S$.
Cálculo de la interpretación de Herbrand $\mathcal{I}^*$ correspondiente a $\mathcal{I}$:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{I}^* & = (\mathrm{UH}(S), I^*) \\
\mathrm{UH}(S) & = \{a, b\} \\
\mathrm{BH}(S) & = \{P(a), P(b), Q(a,a), Q(a,b), Q(b.a), Q(b,b), R(a), R(b)\} \\
I^*(P(a)) & = P^I(a^I) = P^I(1) = \mathrm{V} \\
I^*(P(b)) & = P^I(b^I) = P^I(2) = \mathrm{F} \\
I^*(Q(a,a)) & = Q^I(a^I, a^I) = Q^I(1,1) = \mathrm{V} \\
I^*(Q(a,b)) & = Q^I(a^I, b^I) = Q^I(1,2) = \mathrm{F} \\
I^*(Q(b,a)) & = Q^I(b^I, a^I) = Q^I(2,1) = \mathrm{F} \\
I^*(Q(b,b)) & = Q^I(b^I, b^I) = Q^I(2,2) = \mathrm{V} \\
I^*(R(a))) & = R^I(a^I) = R^I(1) = \mathrm{F} \\
I^*(R(b)) & = R^I(b^I) = R^I(2) = \mathrm{V}
\end{array}
$$

$I^* = \{P(a), Q(a,a), Q(b,b), R(b)\}$ y $\mathcal{I}^* \models S$.

Interpretación de Herbrand de una interpretación

Sea S el conjunto de cláusulas $\{\{P(a)\},\{Q(y,f(a))\}\}$ e $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $a^I = 1$, $f^I = \{(1,2),(2,1)\}$, $P^I = \{1\}$, $Q^I = \{(1,2),(2,2)\}$. Entonces, $\mathcal{I} \models S$.

Cálculo de la interpretación de Herbrand $\mathcal{I}^*$ correspondiente a $\mathcal{I}$:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{I}^* & = (\mathrm{UH}(S), I^*) \\
\mathrm{UH}(S) & = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\} \\
\mathrm{BH}(S) & = \{P(f^n(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^m(a)) : n, m \in \mathbb{N}\} \\
I^*(P(a)) & = P^I(a^I) = P^I(1) = \mathrm{V} \\
I^*(P(f(a))) & = P^I(f^I(a^I)) = P^I(f^I(1)) = P^I(2) = \mathrm{F} \\
I^*(P(f(f(a)))) & = P^I(f^I(f^(a^I))) = P^I(1) = \mathrm{V} \\
I^*(P(f^n(a))) & = \begin{cases} \mathrm{V}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \mathrm{F}, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\
I^*(Q(f^n(a), f^m(a))) & = \begin{cases} \mathrm{V}, & \text{si } m \text{ es impar;} \\ \mathrm{F}, & \text{en caso contrario.} \end{cases}
\end{array}
$$

$I^* = \{P(f^{2n}(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^{2m+1}(a)) : n, m \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{I}^* \models S$.

Consistencia mediante modelos de Herbrand

- Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
  1. S es consistente.
  2. S tiene un modelo de Herbrand.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Si $\mathcal{I}^*$ es una interpretación de Herbrand correspondiente a un modelo $\mathcal{I}$ de S, entonces $\mathcal{I}^*$ es un modelo de S.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
  1. S es consistente.
  2. S tiene un modelo de Herbrand.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
  1. S es inconsistente.
  2. S no tiene ningún modelo de Herbrand.
- Prop.: Existen conjuntos de fórmulas consistentes sin modelos de Herbrand.

Ejemplo de conjunto consistente sin modelos de Herbrand

- Sea $S = \{\exists x\ P(x), \neg P(a)\}$. Entonces,
  - S es consistente.
    $\mathcal{I} \models S$ con $\mathcal{I} = (\{1, 2\}, I)$, $a^I = 1$ y $P^I = \{2\}$.
  - S no tiene modelos de Herbrand
    $\mathrm{UH}(S) = \{a\}$
    $\mathrm{BH}(S) = \{P(a)\}$
    Las interpretaciones de Herbrand de S son $\emptyset$ y $\{P(a)\}$.
    $\emptyset \not\models S$
    $\{P(a)\} \not\models S$
  - Una forma clausal de S es $S' = \{P(b), \neg P(a)\}$.
  - Un modelo de Herbrand de S' es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$ y $P^I = \{b\}$.

Instancias básicas de una cláusula

- Def.: Una sustitución σ (de L) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \to \text{Térm}(L)$.
- Def.: Sea $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ una cláusula de L y σ una sustitución de L. Entonces, $C\sigma = \{L_1\sigma, \dots, L_n\sigma\}$ es una instancia de C.
- Ejemplo: Sea $C = \{P(x, a), \neg P(x, f(y))\}$.
  $C[x/a, y/f(a)] = \{P(f(a), a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$
- Def.: $C\sigma$ es una instancia básica de C si todos los literales de $C\sigma$ son básicos.
- Ejemplo: Sea $C = \{P(x, a), \neg P(x, f(y))\}$.
  $\{P(f(a), a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$ es una instancia básica de C.
  $\{P(f(a), a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$ no es una instancia básica de C.
  $\{P(x, a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$ no es una instancia básica de C.

Extensiones de Herbrand

- Def.: La extensión de Herbrand de un conjunto de cláusulas S es el conjunto de fórmulas
  $$\text{EH}(S) = \{C\sigma : \; C \in S \text{ y, para toda variable } x \text{ en } C, \sigma(x) \in \text{UH}(S)\}$$
- Prop.: $\text{EH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} \text{EH}_i(L)$, donde $\text{EH}_i(L)$ es el nivel i de la $\text{EH}(L)$
  $$\text{EH}_i(S) = \{C\sigma : \; C \in S \text{ y, para toda variable } x \text{ en } C, \sigma(x) \in \text{UH}_i(S)\}$$
- Ejemplos:
  - Sea $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$. Entonces,
    $$\begin{aligned} \text{EH}_0(S) &= \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\} \\ \text{EH}_1(S) &= \text{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\} \\ \text{EH}_2(S) &= \text{EH}_1(S) \cup \{\{P(f(f(a)))\}, \{\neg P(f(f(f(a))))\}\} \end{aligned}$$
  - Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$. Entonces,
    $\text{EH}(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}$.
  - Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$. Entonces,
    $\text{EH}(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

Teorema de Herbrand

- Teorema de Herbrand: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
  1. S es consistente.
  2. EH(S) es consistente (en el sentido proposicional).
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Entonces, son equivalentes
  1. S es inconsistente.
  2. EH(S) tiene un subconjunto finito inconsistente (en el sentido proposicional).
  3. Para algún i, $\mathrm{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional).

Semidecisión mediante el teorema de Herbrand

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.
Salida: *Inconsistente*, si S es inconsistente.

$i := 0$
bucle
  si $\mathrm{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional) **entonces**
    Devolver *Inconsistente* y terminar
  en caso contrario
    $i := i + 1$
  fsi
fbucle

Ejemplos de decisión mediante el teorema de Herbrand

- $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ (p. 20) es inconsistente.
  $\text{EH}_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}$ es inconsistente.

1	$\{\neg P(a), Q(a)\}$	
2	$\{P(a)\}$	
3	$\{\neg Q(a)\}$	
4	$\{Q(a)\}$	Res 1, 2
5	$\square$	Res 3, 4

- $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.
  $\text{EH}_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

1	$\{\neg P(a), Q(a)\}$	
2	$\{\neg Q(a), R(a)\}$	
3	$\{P(a)\}$	
4	$\{\neg R(a)\}$	
5	$\{Q(a)\}$	Res 1, 3
6	$\{R(a)\}$	Res 5, 2
7	$\square$	Res 6, 4

Ejemplos de decisión mediante el teorema de Herbrand

- $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ es inconsistente (p. 20).
  – $\mathrm{EH}_0(S) = \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\}$ es consistente
  $\mathcal{I} = \{P(a)\} \models \mathrm{EH}_0(S)$
  – $\mathrm{EH}_1(S) = \mathrm{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$ es inconsistente.
  $$\begin{array}{lll} 1 & \{P(f(a))\} & \\ 2 & \{\neg P(f(a))\} & \\ 3 & \square & \text{Res } 1,2 \end{array}$$
- $S = \{\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(y, z)\}\}$ es inconsistente.
  Dem.:
  $$\begin{array}{ll} S' & = \{\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}\} \\ & \subset \mathrm{EH}(S) \end{array}$$
  es inconsistente.
  $$\begin{array}{lll} 1 & \{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\} & \\ 2 & \{P(g(b))\} & \\ 3 & \{\neg Q(f(g(b)), g(b))\} & \\ 4 & \{Q(f(g(b)), g(b))\} & \text{Res } 1,2 \\ 5 & \square & \text{Res } 3,3 \end{array}$$

Bibliografía

1. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 31–34.
2. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 51–62.
3. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 59–74.
4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 160–169.
5. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 47–50.
6. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 70–78.