

Lógica matemática y fundamentos (2011–12)

Tema 7: Deducción natural en lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 7: Deducción natural en lógica de primer orden

1. Sustituciones
2. Reglas de deducción natural de cuantificadores
3. Reglas de la igualdad

Tema 7: Deducción natural en lógica de primer orden

1. Sustituciones

Definición de sustitución

Aplicación de sustituciones a términos

Aplicación de sustituciones a fórmulas

Sustituciones libres

2. Reglas de deducción natural de cuantificadores

3. Reglas de la igualdad

Sustituciones

- ▶ Def.: Una **sustitución** σ (de L) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \rightarrow \text{Térm}(L)$.
- ▶ Notación: $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ representa la sustitución σ definida por

$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

- ▶ Ejemplo: $[x/s(0), y/x + y]$ es la sustitución σ de Var en los términos de la aritmética definida por

$$\sigma(x) = s(0), \sigma(y) = x + y \text{ y } \sigma(z) = z \text{ para } z \in \text{Var} \setminus \{x, y\}$$

- ▶ Notación: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ representarán sustituciones.

Aplicación de sustituciones a términos

- ▶ Def.: $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es el término obtenido sustituyendo en t las apariciones de x_i por t_i .
- ▶ Def.: La extensión de σ a términos es la aplicación $\sigma : \text{Térm}(L) \rightarrow \text{Térm}(L)$ definida por

$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$
- ▶ Ejemplo: Si $\sigma = [x/f(y, a), y/z]$, entonces
 - ▶ $a\sigma = a$, donde a es una constante.
 - ▶ $w\sigma = w$, donde w es una variable distinta de x e y .
 - ▶ $h(a, x, w)\sigma = h(a\sigma, x\sigma, w\sigma) = h(a, f(y, a), w)$
 - ▶ $f(x, y)\sigma = f(x\sigma, y\sigma) = f(f(y, a), z)$
 - ▶ $h(a, f(x, y), w)\sigma = h(a\sigma, f(x, y)\sigma, w\sigma) = h(a, f(f(y, a), z), w)$

Aplicación de sustituciones a fórmulas

- ▶ Def.: $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida sustituyendo en F las apariciones libres de x_i por t_i .
- ▶ Def.: La extensión de σ a fórmulas es la aplicación $\sigma : \text{Fórm}(L) \rightarrow \text{Fórm}(L)$ definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1, \dots, t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall, \exists\} \end{cases}$$

donde σ_x es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y), & \text{si } y \text{ es distinta de } x. \end{cases}$$

Ejemplos de aplicación de sustituciones a fórmulas

► Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces

$$\begin{aligned} \text{► } (\forall x (Q(x) \rightarrow R(x, y)))\sigma &= \forall x ((Q(x) \rightarrow R(x, y))\sigma_x) \\ &= \forall x (Q(x)\sigma_x \rightarrow R(x, y)\sigma_x) \\ &= \forall x (Q(x) \rightarrow R(x, b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } (Q(x) \rightarrow \forall x R(x, y))\sigma &= Q(x)\sigma \rightarrow (\forall x R(x, y))\sigma \\ &= Q(f(y)) \rightarrow \forall x (R(x, y)\sigma_x) \\ &= Q(f(y)) \rightarrow \forall x R(x, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } (\forall x (Q(x) \rightarrow \forall y R(x, y)))\sigma &= \forall x ((Q(x) \rightarrow \forall y R(x, y))\sigma_x) \\ &= \forall x (Q(x)\sigma_x \rightarrow (\forall y R(x, y))\sigma_x) \\ &= \forall x (Q(x) \rightarrow \forall y (R(x, y)\sigma_{xy})) \\ &= \forall x (Q(x) \rightarrow \forall y R(x, y)) \end{aligned}$$

Sustituciones libres

- ▶ Def.: Una **sustitución se denomina libre para una fórmula** cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ $[y/x]$ no es libre para $\exists x (x < y)$
 $\exists x (x < y)[y/x] = \exists x (x < x)$
 - ▶ $[y/g(y)]$ es libre para $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$
 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(y)]$
 $= \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(g(y))))$
 - ▶ $[y/g(x)]$ no es libre para $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$
 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(x)]$
 $= \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(g(x))))$
- ▶ Convenio: Al escribir $F\sigma$ supondremos que σ es libre para F .

Tema 7: Deducción natural en lógica de primer orden

1. Sustituciones

2. Reglas de deducción natural de cuantificadores

Reglas del cuantificador universal

Reglas del cuantificador existencial

Demostración de equivalencias por deducción natural

3. Reglas de la igualdad

Regla de eliminación del cuantificador universal

- ▶ Regla de **eliminación del cuantificador universal**:

$$\frac{\forall x F}{F[x/t]} \forall e$$

donde $[x/t]$ es libre para F .

- ▶ Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.
- ▶ Ejemplo: $P(c), \forall x [P(x) \rightarrow \neg Q(x)] \vdash \neg Q(c)$

1 $P(c)$ premisa

2 $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ premisa

3 $P(c) \rightarrow \neg Q(c)$ $\forall e$ 2

4 $\neg Q(c)$ $\rightarrow e$ 3, 1

- ▶ Nota: $\forall x \exists y (x < y) \not\vdash \exists y (y < y)$.

Regla de introducción del cuantificador universal

$$\frac{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ F[x/x_0] \end{array}}{\forall x F} \quad \forall i$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

► Nota: Analogía con $\wedge i$.

► $\forall x [P(x) \rightarrow \neg Q(x)], \forall x P(x) \vdash \forall x \neg Q(x)$

1 $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ premisa

2 $\forall x P(x)$ premisa

3 actual x_0 supuesto

4 $P(x_0) \rightarrow \neg Q(x_0)$ $\forall e$ 1, 3

5 $P(x_0)$ $\forall e$ 2, 3

6 $Q(x_0)$ $\rightarrow e$ 4, 5

7 $\forall x \neg Q(x)$ $\forall i$ 3 – 6

Regla de introducción del cuantificador existencial

- ▶ Regla de **introducción del cuantificador existencial**:

$$\frac{F[x/t]}{\exists x F} \exists i$$

donde $[x/t]$ es libre para F .

- ▶ Nota: Analogía con $\forall i_1$ y $\forall i_2$.

- ▶ Ejemplo 3: $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$

$$1 \quad \forall x P(x) \quad \text{premisa}$$

$$2 \quad P(x_0) \quad \forall e 1$$

$$3 \quad \exists x P(x) \quad \exists i 2$$

Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\frac{\exists x F \quad \boxed{\begin{array}{l} x_0 \quad F[x/x_0] \\ \vdots \\ G \end{array}}}{G} \exists e$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

► Nota: Analogía con $\forall e$.

► Ejemplo: $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

1 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ premisa

2 $\exists x P(x)$ premisa

3 actual $x_0, P(x_0)$ supuesto

4 $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ $\forall e$ 1, 3

5 $Q(x_0)$ $\rightarrow e$ 4, 3

6 $\exists x Q(x)$ $\exists i$ 5

7 $\exists x Q(x)$ $\exists e$ 2, 3 – 6

Equivalencias

- ▶ Sean F y G fórmulas.

$$[1(a)] \neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$$

$$[1(b)] \neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$$

- ▶ Sean F y G fórmulas y x una variable no libre en G .

$$[2(a)] \forall x F \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$$

$$[2(b)] \forall x F \vee G \equiv \forall x (F \vee G)$$

$$[2(c)] \exists x F \wedge G \equiv \exists x (F \wedge G)$$

$$[2(d)] \exists x F \vee G \equiv \exists x (F \vee G)$$

- ▶ Sean F y G fórmulas.

$$[3(a)] \forall x F \wedge \forall x G \equiv \forall x (F \wedge G)$$

$$[3(b)] \exists x F \vee \exists x G \equiv \exists x (F \vee G)$$

- ▶ Sean F y G fórmulas.

$$[4(a)] \forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$$

$$[4(b)] \exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$$

Equivalencia 1(a) \rightarrow

$$\neg\forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$$

1 $\neg\forall x P(x)$ premisa

| | | |
|----|---------------------------|-------------------|
| 2 | $\neg\exists x \neg P(x)$ | supuesto |
| 3 | actual x_0 | supuesto |
| 4 | $\neg P(x_0)$ | supuesto |
| 5 | $\exists x \neg P(x)$ | $\exists i$ 4, 3 |
| 6 | \perp | $\neg e$ 2, 5 |
| 7 | $P(x_0)$ | RAA 4 – 6 |
| 8 | $\forall x P(x)$ | $\forall i$ 3 – 7 |
| 9 | \perp | $\neg e$ 1, 8 |
| 10 | $\exists x \neg P(x)$ | RAA 2 – 9 |

Equivalencia 1(a) ←

 $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$ 1 $\exists x \neg P(x)$ premisa2 $\neg \neg \forall x P(x)$ supuesto3 actual $x_0, \neg P(x_0)$ supuesto4 $\forall x P(x)$ $\neg \neg e$ 25 $P(x_0)$ $\forall e$ 46 \perp $\neg e$ 3, 57 \perp $\exists e$ 1, 3 – 68 $\neg \forall x P(x)$ RAA 2 – 7

Equivalencia 1(a) \leftrightarrow

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

| | | |
|---|-----------------------|----------|
| 1 | $\neg \forall x P(x)$ | supuesto |
|---|-----------------------|----------|

| | | |
|---|-----------------------|-------------------------|
| 2 | $\exists x \neg P(x)$ | Lema 1(a) \rightarrow |
|---|-----------------------|-------------------------|

| | | |
|---|---|-----------------------|
| 3 | $\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$ | \rightarrow i 1 – 2 |
|---|---|-----------------------|

| | | |
|---|-----------------------|----------|
| 4 | $\exists x \neg P(x)$ | supuesto |
|---|-----------------------|----------|

| | | |
|---|-----------------------|------------------------|
| 5 | $\neg \forall x P(x)$ | Lema 1(a) \leftarrow |
|---|-----------------------|------------------------|

| | | |
|---|---|-----------------------|
| 6 | $\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$ | \rightarrow i 4 – 5 |
|---|---|-----------------------|

| | | |
|---|---|--------------------------|
| 7 | $\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ | \leftrightarrow i 3, 6 |
|---|---|--------------------------|

Equivalencia 3(a) \rightarrow

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

1 $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ premisa

2 actual x_0 supuesto

3 $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ $\forall e$ 1, 2

4 $P(x_0)$ $\wedge e_1$ 3

5 $\forall x P(x)$ $\forall i$ 2 – 4

6 actual x_1 supuesto

7 $P(x_1) \wedge Q(x_1)$ $\forall e$ 1, 6

8 $Q(x_1)$ $\wedge e_2$ 7

9 $\forall x Q(x)$ $\forall i$ 6 – 8

10 $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ $\wedge i$ 5, 9

Equivalencia 3(a) ←

$$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \vdash \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

1 $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ premisa

2 actual x_0 supuesto

3 $\forall x P(x)$ $\wedge e_1$ 1

4 $P(x_0)$ $\forall e$ 3, 2

5 $\forall x Q(x)$ $\wedge e_2$ 1

6 $Q(x_0)$ $\forall e$ 5

7 $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ $\wedge i$ 4, 6

8 $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ $\forall i$ 2 – 7

Equivalencia 3(a) \leftrightarrow

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

| | | |
|---|--------------------------------|----------|
| 1 | $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ | supuesto |
|---|--------------------------------|----------|

| | | |
|---|--|-------------------------|
| 2 | $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | Lema 3(a) \rightarrow |
|---|--|-------------------------|

| | | |
|---|---|-----------------------|
| 3 | $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | \rightarrow i 1 – 2 |
|---|---|-----------------------|

| | | |
|---|--|----------|
| 4 | $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | supuesto |
|---|--|----------|

| | | |
|---|--------------------------------|------------------------|
| 5 | $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ | Lema 3(a) \leftarrow |
|---|--------------------------------|------------------------|

| | | |
|---|---|-----------------------|
| 6 | $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$ | \rightarrow i 4 – 5 |
|---|---|-----------------------|

| | | |
|---|---|--------------------------|
| 7 | $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | \leftrightarrow i 3, 6 |
|---|---|--------------------------|

Equivalencia 3(b) \rightarrow

$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vdash \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

$$1 \quad \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

premisa

$$2 \quad \exists x P(x) \quad \text{supuesto}$$

$$3 \quad \text{actual } x_0, P(x_0) \quad \text{supuesto}$$

$$4 \quad P(x_0) \vee Q(x_0) \quad \forall i_1 3$$

$$5 \quad \exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \exists i 4, 3$$

$$6 \quad \exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \exists e 2, 3 - 5$$

$$7 \quad \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

$$\exists x Q(x) \quad \text{supuesto}$$

$$\text{actual } x_1, Q(x_1) \quad \text{supuesto}$$

$$P(x_1) \vee Q(x_1) \quad \forall i_2 3'$$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \exists i 3', 4'$$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \exists e 2', 3' - 5'$$

$$\forall 1e, 2 - 6, 2' - 6'$$

Equivalencia 3(b) ←

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

1 $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ premisa

2 actual x_0 , $P(x_0) \vee Q(x_0)$ supuesto

3 $P(x_0)$ supuesto

4 $\exists x P(x)$ $\exists i$ 3, 2

5 $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ $\vee i_1$ 4

6 $Q(x_0)$ supuesto

7 $\exists x Q(x)$ $\exists i$ 6, 2

8 $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ $\vee i_2$ 7

9 $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ $\vee e$ 2, 3 – 5, 6 – 8

10 $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ $\exists e$ 1, 2 – 9

Equivalencia 3(b) \leftrightarrow

$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

| | | |
|---|--------------------------------------|-------------------------|
| 1 | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | supuesto |
| 2 | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | Lema 3(b) \rightarrow |

$$3 \quad \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \rightarrow i \ 1 - 2$$

| | | |
|---|--------------------------------------|------------------------|
| 4 | $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ | supuesto |
| 5 | $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ | Lema 3(b) \leftarrow |

$$6 \quad \exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \quad \rightarrow i \ 4 - 5$$

$$7 \quad \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \leftrightarrow i \ 3, 6$$

Equivalencia 4(b) \rightarrow $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$ 1 $\exists x \exists y P(x, y)$ premisa2 actual $x_0, \exists y P(x_0, y)$ supuesto3 actual $y_0, P(x_0, y_0)$ supuesto4 $\exists x P(x, y_0)$ $\exists i$ 3,2, 2,15 $\exists y \exists x P(x, y)$ $\exists i$ 4, 3,16 $\exists y \exists x P(x, y)$ $\exists e$ 2,2, 3 – 57 $\exists y \exists x P(x, y)$ $\exists e$ 1, 2 – 6

Equivalencia 4(b) \leftrightarrow

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$$

| | | |
|---|-------------------------------|----------|
| 1 | $\exists x \exists y P(x, y)$ | supuesto |
|---|-------------------------------|----------|

| | | |
|---|-------------------------------|-------------------------|
| 2 | $\exists y \exists x P(x, y)$ | Lema 4(b) \rightarrow |
|---|-------------------------------|-------------------------|

| | | |
|---|---|-----------------------|
| 3 | $\exists x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \exists x P(x, y)$ | \rightarrow i 1 – 2 |
|---|---|-----------------------|

| | | |
|---|-------------------------------|----------|
| 4 | $\exists y \exists x P(x, y)$ | supuesto |
|---|-------------------------------|----------|

| | | |
|---|-------------------------------|-------------------------|
| 5 | $\exists x \exists y P(x, y)$ | Lema 4(b) \rightarrow |
|---|-------------------------------|-------------------------|

| | | |
|---|---|-----------------------|
| 6 | $\exists y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$ | \rightarrow i 4 – 5 |
|---|---|-----------------------|

| | | |
|---|---|--------------------------|
| 7 | $\exists x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$ | \leftrightarrow i 3, 6 |
|---|---|--------------------------|

Tema 7: Deducción natural en lógica de primer orden

1. Sustituciones
2. Reglas de deducción natural de cuantificadores
3. Reglas de la igualdad
 - Regla de eliminación de la igualdad
 - Regla de introducción de la igualdad

Regla de eliminación de la igualdad

- ▶ Regla de **eliminación de la igualdad**:

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} = e$$

donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F .

- ▶ Ejemplo:

$$1 \quad (x + 1) = (1 + x) \quad \text{premisa}$$

$$2 \quad (x + 1 > 1) \rightarrow (x + 1 > 0) \quad \text{premisa}$$

$$3 \quad (1 + x > 1) \rightarrow (1 + x > 0) \quad =e \ 1, 2$$

- ▶ Ejemplo: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

$$1 \quad t_1 = t_2 \quad \text{premisa}$$

$$2 \quad t_2 = t_3 \quad \text{premisa}$$

$$3 \quad t_1 = t_3 \quad =e \ 2, 1$$

Regla de introducción de la igualdad

- ▶ Regla de introducción de la igualdad:

$$\frac{}{t = t} = i$$

- ▶ Ejemplo: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

$$1 \quad t_1 = t_2 \quad \text{premisa}$$

$$2 \quad t_1 = t_1 \quad =i$$

$$3 \quad t_2 = t_1 \quad =e 1, 2$$

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000) pp. 259–287.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
3. J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review*. (2000) pp. 28–33.
4. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional*. (UNED, 2003) pp. 88–94.
5. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.