Lógica matemática y fundamentos (2013–14)

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

Lógica

- Objetivos de la lógica:
  - La formalización del lenguaje natural.
  - Los métodos de razonamiento.
- Sistemas lógicos:
  - Lógica proposicional.
  - Lógica de primer orden.
  - Lógicas de orden superior.
  - Lógicas modales.
  - Lógicas descriptivas.
- Aplicaciones de la lógica en computación:
  - Programación lógica.
  - Verificación y síntesis automática de programas.
  - Representación del conocimiento y razonamiento.
  - Modelización y razonamiento sobre sistemas.
- Lógica informática = Representación del conocimiento + Razonamiento

Argumentos y formalización

- Ejemplos de argumentos:
  - Ejemplo 1: Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. *Por tanto*, habían taxis en la estación.
  - Ejemplo 2: Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. *Por tanto*, la lámpara está fundida.
- Formalización:
  - Simbolización:

Simb.	Ejemplo 1	Ejemplo 2
p	el tren llega a las 7	hay corriente
q	hay taxis en la estación	la lámpara está fundida
r	Juan llega tarde a la reunión	la lámpara está encendida

.

  - Si p y no q, entonces r. No r. p. Por tanto, q.
  - $p \land \neg q \to r, \; \neg r, \; p \models q$.

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

El lenguaje de la lógica proposicional

- Alfabeto proposicional:
  - variables proposicionales: $p_0, p_1, \dots; p, q, r$.
  - conectivas lógicas:
    - monaria: $\neg$ (negación),
    - binarias: $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción),
      $\rightarrow$ (condicional), $\leftrightarrow$ (bicondicional).
  - símbolos auxiliares: "(" y ")".
- Fórmulas proposicionales:
  - Definición:
    - Las variables proposicionales son fórmulas (fórmulas atómicas).
    - Si F y G son fórmulas, entonces también lo son
      $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$
  - Ejemplos:
    - Fórmulas: p, $(p \vee \neg q)$, $\neg(p \vee p)$, $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$
    - No fórmulas: (p), $p \vee \neg q$, $(p \vee \wedge q)$

Fórmulas proposicionales (BNF)

- Notaciones:
  - $p, q, r, \dots$ representarán variables proposicionales.
  - $F, G, H, \dots$ representarán fórmulas.
  - VP representa el conjunto de los variables proposicionales.
  - Prop representa el conjunto de las fórmulas.
  - $*$ representa una conectiva binaria.
- Forma de Backus Naur (BNF) de las fórmula proposicionales:
  - $F ::= p \mid \neg G \mid (F \land G) \mid (F \lor G) \mid (F \rightarrow G) \mid (F \leftrightarrow G)$.

Definiciones por recursión sobre fórmulas

- Número de paréntesis de una fórmula:
  - Def: El número de paréntesis de una fórmula F se define recursivamente por:

$$\mathrm{np}(F) = \begin{cases} 0, & \text{si } F \text{ es atómica;} \\ \mathrm{np}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ 2 + \mathrm{np}(G) + \mathrm{np}(H), & \text{si } F \text{ es } (G * H) \end{cases}$$

  - Ejemplos:
    - $\mathrm{np}(p) = 0$
    - $\mathrm{np}(q) = 0$
    - $\mathrm{np}(\neg q) = 0$
    - $\mathrm{np}((\neg q \vee p)) = 2$
    - $\mathrm{np}((p \rightarrow (\neg q \vee p))) = 4$

Demostración por inducción sobre fórmulas

- Principio de inducción sobre fórmulas: Sea $\mathcal{P}$ una propiedad sobre las fórmulas que verifica las siguientes condiciones:
  - Todas las fórmulas atómicas tienen la propiedad $\mathcal{P}$.
  - Si F y G tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$, tienen la propiedad $\mathcal{P}$.

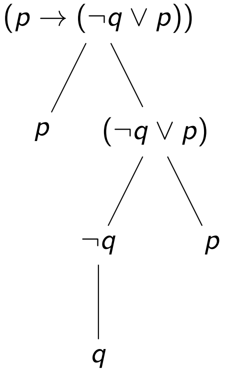
  Entonces todas las fórmulas proposicionales tienen la propiedad $\mathcal{P}$.
- Propiedad: Todas las fórmulas proposicionales tienen un número par de paréntesis.
  - Demostración por inducción sobre las fórmulas.
    - Base: F atómica $\Longrightarrow \text{np}(F) = 0$ es par.
    - Paso: Supongamos que $\text{np}(F)$ y $\text{np}(G)$ es par (hipótesis de inducción). Entonces,

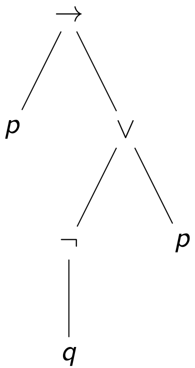
      $\text{np}(\neg F) = \text{np}(F)$ es par y

      $\text{np}((F * G)) = 2 + \text{np}(F) + \text{np}(G)$ es par,

      para cualquier conectiva binaria $\star$.

Árboles de análisis (o de formación)





Criterios de reducción de paréntesis

- Pueden eliminarse los paréntesis externos.
  $F \land G$ es una abreviatura de $(F \land G)$.
- Precedencia de asociación de conectivas: $\neg, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow$.
  $F \land G \rightarrow \neg F \lor G$ es una abreviatura de
  $((F \land G) \rightarrow (\neg F \lor G))$.
- Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.

$F \lor G \lor H$	abrevia	$(F \lor (G \lor H))$
$F \land G \land H \rightarrow \neg F \lor G$	abrevia	$((F \land (G \land H)) \rightarrow (\neg F \lor G))$

Subfórmulas

- Def: El conjunto Subf(F) de las subfórmulas de una fórmula F se define recursivamente por:
$$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es atómica;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H \end{cases}$$
- Ejemplos:
  - $\text{Subf}(p) = \{p\}$
  - $\text{Subf}(q) = \{q\}$
  - $\text{Subf}(\neg q) = \{\neg q, q\}$
  - $\text{Subf}(\neg q \vee p) = \{\neg q \vee p, \neg q, q, p\}$
  - $\text{Subf}(p \to \neg q \vee p) = \{p \to \neg q \vee p, p, \neg q \vee p, \neg q, q\}$

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

Valores y funciones de verdad

- Valores de verdad ($\mathbb{B}$): 1: verdadero y 0: falso.
- Funciones de verdad:
  - $H_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ t.q. $H_\neg(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{si } i = 1. \end{cases}$
  - $H_\wedge : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\wedge(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\vee : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\vee(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\to : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\to(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\leftrightarrow : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\leftrightarrow(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Interpretaciones de fórmulas

- Funciones de verdad mediante tablas de verdad:

i	$\neg i$
1	0
0	1

i	j	$i \wedge j$	$i \vee j$	$i \rightarrow j$	$i \leftrightarrow j$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

- Interpretación:
  - Def.: Una interpretación es una aplicación $I : \text{VP} \rightarrow \mathbb{B}$.
  - Prop: Para cada interpretación I existe una única aplicación $I' : \text{Prop} \rightarrow \mathbb{B}$ tal que:

$$I'(F) = \begin{cases} I(F), & \text{si } F \text{ es atómica;} \\ H_{\neg}(I'(G)), & \text{si } F = \neg G; \\ H_{*}(I'(G), I'(H)), & \text{si } F = G * H \end{cases}$$

Se dice que $I'(F)$ es el valor de verdad de F respecto de I.

Interpretaciones de fórmulas

- Ejemplo: Sea $F = (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$
  - valor de F en una interpretación I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$
$$\begin{array}{ccccccc} (p & \lor & q) & \land & (\neg q & \lor & r) \\ (1 & \lor & 0) & \land & (\neg 0 & \lor & 1) \\ & 1 & & \land & (1 & \lor & 1) \\ & 1 & & \land & & 1 & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$
  - valor de F en una interpretación I_2 tal que $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$
$$\begin{array}{ccccccc} (p & \lor & q) & \land & (\neg q & \lor & r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 \end{array}$$
- Prop.: Sea F una fórmula y I_1, I_2 dos interpretaciones. Si $I_1(p) = I_2(p)$ para todos las variables proposicionales de F, entonces $I_1'(F) = I_2'(F)$.
- Notación: Se escribe $I(F)$ en lugar de $I'(F)$.

Modelos y satisfacibilidad

- Modelo de una fórmula
  - Def.: I es modelo de F si $I(F) = 1$.
  - Notación: $I \models F$.
  - Ejemplo (continuación del anterior):
    – si $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$, entonces $I_1 \models (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$
    – si $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$, entonces $I_2 \not\models (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$.
- Fórmulas satisfacibles e insatisfacibles
  - Def.: F es satisfacible si F tiene algún modelo.
  - Ejemplo: $(p \to q) \land (q \to r)$ es satisfacible
    $I(p) = I(q) = I(r) = 0$.
  - Def.: F es insatisfacible si F no tiene ningún modelo.
  - Ejemplo: $p \land \neg p$ es insatisfacible

p	$\neg p$	$p \land \neg p$
1	0	0
0	1	0

Tautologías y contradicciones

- Def.: F es una tautología (o válida) si toda interpretación es modelo de F. Se representa por $\models F$.
- Def.: F es una contradicción si ninguna interpretación es modelo de F.
- Def.: F es contingente si no es tautología ni contradicción.
- Ejemplos:
  1. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es una tautología.
  2. $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$ es una contradicción.
  3. $p \rightarrow q$ es contingente.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	$\neg(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$
1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Clasificaciones de fórmulas

Todas las fórmulas		
Tautologías	Contigentes	Contradicciones
Verdadera en todas las interpretaciones (ej. $p \vee \neg p$)	Verdadera en algunas interpretaciones y falsa en otras (ej. $p \to q$)	Falsa en todas las interpretaciones (ej. $p \wedge \neg p$)
Safisfacibles		Insatisfacibles
Todas las fórmulas		

Satisfacibilidad y validez

- Los problemas SAT y TAUT:
  - Problema SAT: Dada F determinar si es satisfacible.
  - Problema TAUT: Dada F determinar si es una tautología.
- Relaciones entre satisfacibilidad y tautologicidad:
  - F es tautología $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible.
  - F es tautología $\implies$ F es satisfacible.
  - F es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.

    $p \to q$ es satisfacible.

    $$I(p) = I(q) = 1$$

    $\neg(p \to q)$ es satisfacible.

    $$I(p) = 1, I(q) = 0.$$

Algoritmos para SAT y TAUT

- Tabla de verdad para $\models (p \to q) \lor (q \to p)$:

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	$(p \to q) \lor (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

- Tabla de verdad simplificada para $\models (p \to q) \lor (q \to p)$:

p	q	$(p$	$\to$	$q)$	$\lor$	$(q$	$\to$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0

Algoritmos para SAT y TAUT

- Método de Quine para $\models (p \to q) \lor (q \to p)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
(p & \to & q) & \lor & (q & \to & p) \\
 & & & 0 & & & \\
 & 0 & & & & 0 & \\
 & & & & 1 & & 0 \\
0 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & & & &
\end{array}
$$

- Método de Quine para $\models (p \to q) \lor (q \to p)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
(p & \to & q) & \lor & (q & \to & p) \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1* & & & & &
\end{array}
$$

Algoritmos para SAT y TAUT

- Tablas de verdad para $\not\models (p \leftrightarrow q) \lor (q \leftrightarrow p)$

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(q \leftrightarrow p)$	$(p \leftrightarrow q) \lor (q \leftrightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

- Método de Quine para $\not\models (p \leftrightarrow q) \lor (q \leftrightarrow p)$

$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$\lor$	$(q$	$\leftrightarrow$	$p)$
0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1

Selección de tautologías

1. $F \to F$ (ley de identidad).
2. $F \lor \neg F$ (ley del tercio excluido).
3. $\neg(F \land \neg F)$ (principio de no contradicción).
4. $(\neg F \to F) \to F$ (ley de Clavius).
5. $\neg F \to (F \to G)$ (ley de Duns Scoto).
6. $((F \to G) \to F) \to F$ (ley de Peirce).
7. $(F \to G) \land F \to G$ (modus ponens).
8. $(F \to G) \land \neg G \to \neg F$ (modus tollens).

Fórmulas equivalentes

- Def.: F y G son equivalentes si $I(F) = I(G)$ para toda interpretación I. Representación: $F \equiv G$.
- Ejemplos de equivalencias notables:
  1. Idempotencia: $F \lor F \equiv F$; $F \land F \equiv F$.
  2. Conmutatividad: $F \lor G \equiv G \lor F$; $F \land G \equiv G \land F$.
  3. Asociatividad: $F \lor (G \lor H) \equiv (F \lor G) \lor H$;
     $F \land (G \land H) \equiv (F \land G) \land H$
  4. Absorción: $F \land (F \lor G) \equiv F$; $F \lor (F \land G) \equiv F$.
  5. Distributividad: $F \land (G \lor H) \equiv (F \land G) \lor (F \land H)$;
     $F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$.
  6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.
  7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$;
     $\neg(F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G$
  8. Leyes de tautologías: Si F es una tautología,
     $F \land G \equiv G$; $F \lor G \equiv F$.
  9. Leyes de contradicciones: Si F es una contradicción
     $F \land G \equiv F$; $F \lor G \equiv G$.

Propiedades de la equivalencia lógica

- Relación entre equivalencia y bicondicional:
  - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
  - Reflexiva: $F \equiv F$.
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$.
  - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$.
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
  - Prop.: Si en la fórmula F se sustituye una de sus subfórmulas G por una fórmula G' lógicamente equivalente a G, entonces la fórmula obtenida, F', es lógicamente equivalente a F.
  - Ejemplo: $$\begin{aligned} F &= \neg(p \land q) \to \neg(p \land \neg\neg r) \\ G &= \neg(p \land q) \\ G' &= \neg p \lor \neg q \\ F' &= (\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land \neg\neg r) \end{aligned}$$

Modelo de conjuntos de fórmulas

- Notación:
  - $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- Modelo de un conjunto de fórmulas:
  - Def.: I es modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $I \models F$.
  - Representación: $I \models S$.
  - Ejemplo: Sea $S = \{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), q \rightarrow r\}$
    La interpretación I_1 tal que $I_1(p) = 1, I_1(q) = 0, I_1(r) = 1$ es modelo de S ($I_1 \models S$).
    $$\begin{array}{ccccccccccc} \{(p & \vee & q) & \wedge & (\neg & q & \vee & r), & q & \rightarrow & r\} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$
    La interpretación I_2 tal que $I_2(p) = 0, I_2(q) = 1, I_2(r) = 0$ no es modelo de S ($I_2 \not\models S$).
    $$\begin{array}{ccccccccccc} \{(p & \vee & q) & \wedge & (\neg & q & \vee & r), & q & \rightarrow & r\} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Conjunto consistente de fórmulas

- Def.: S es consistente si S tiene algún modelo.
- Def.: S es inconsistente si S no tiene ningún modelo.
- Ejemplos:
  - $\{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), p \to r\}$ es consistente (con modelos I_4, I_6, I_8)
  - $\{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), p \to r, \neg r\}$ es inconsistente

	p	q	r	$(p \lor q)$	$(\neg q \lor r)$	$(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$	$p \to r$	$\neg r$
I_1	0	0	0	0	1	0	1	1
I_2	0	0	1	0	1	0	1	0
I_3	0	1	0	1	0	0	1	1
I_4	0	1	1	1	1	1	1	0
I_5	1	0	0	1	1	1	0	1
I_6	1	0	1	1	1	1	1	0
I_7	1	1	0	1	0	0	0	1
I_8	1	1	1	1	1	1	1	0

Consecuencia lógica

- Def.: F es consecuencia de S si todos los modelos de S son modelos de F.
- Representación: $S \models F$.
- Ejemplos: $\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$ y $\{p\} \not\models p \land q$

	p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
I_1	0	0	0	1	1	1
I_2	0	0	1	1	1	1
I_3	0	1	0	1	0	1
I_4	0	1	1	1	1	1
I_5	1	0	0	0	1	0
I_6	1	0	1	0	1	1
I_7	1	1	0	1	0	0
I_8	1	1	1	1	1	1

p	q	$p \land q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Propiedades de la consecuencia

- Propiedades básicas de la relación de consecuencia:
  - Reflexividad: $S \models S$.
  - Monotonía: Si $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2 \models F$.
  - Transitividad: Si $S \models F$ y $\{F\} \models G$, entonces $S \models G$.
- Relación entre consecuencia, validez, satisfacibilidad y consistencia:
  - Las siguientes condiciones son equivalentes:
    1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$
    2. $\models F_1 \wedge \dots \wedge F_n \to G$
    3. $\neg(F_1 \wedge \dots \wedge F_n \to G)$ es insatisfacible
    4. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente

Ejemplo de argumentación

- Problema de los animales: Se sabe que
  1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
  2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
  3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
  4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

  Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.
- Formalización:

$$
\begin{array}{ll}
\{ & \text{tiene\_pelos} \lor \text{da\_leche} \to \text{es\_mamífero}, \\
 & \text{es\_mamífero} \land (\text{tiene\_pezuñas} \lor \text{rumia}) \to \text{es\_ungulado}, \\
 & \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_cuello\_largo} \to \text{es\_jirafa}, \\
 & \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \to \text{es\_cebra}, \\
 & \text{tiene\_pelos} \land \text{tiene\_pezuñas} \land \text{tiene\_rayas\_negras}\}
\end{array}
$$

$$\models \text{es\_cebra}$$

Problemas lógicos: veraces y mentirosos

- Enunciado: En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase
  1. A dice "B y C son veraces syss C es veraz"
  2. B dice "Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso"
  3. C dice "B es mentiroso syss A o B es veraz"

  Determinar a qué tribu pertenecen A, B y C.
- Simbolización: a: "A es veraz", b: "B es veraz", c: "C es veraz".
- Formalización:
  $F_1 = a \leftrightarrow (b \land c \leftrightarrow c)$, $F_2 = b \leftrightarrow (a \land c \rightarrow b \land c \land \neg a)$ y
  $F_3 = c \leftrightarrow (\neg b \leftrightarrow a \lor b)$.
- Modelos de $\{F_1, F_2, F_3\}$:
  Si I es modelo de $\{F_1, F_2, F_3\}$, entonces $I(a) = 1, I(b) = 1, I(c) = 0$.
- Conclusión: A y B son veraces y C es mentiroso.

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000)

   Cap. 0 (Introducción), 6 (Sintaxis de la lógica proposicional), 7 (Semántica de la lógica proposicional), 9 (Consecuencia lógica) y 11 (Lógica proposicional y lenguaje natural).

2. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001)

   Cap. 1 (Introduction) y 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).

3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)

   Cap. 2 (El lenguaje de la lógica proposicional) y 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).

4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000)

   Cap. 1 (Propositional logic).