

# Lógica matemática y fundamentos (2013–14)

## Tema 5: Resolución proposicional

José A. Alonso Jiménez  
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 5: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución

## Tema 5: Resolución proposicional

### 1. Lógica de cláusulas

Sintaxis de la lógica clausal

Semántica de la lógica clausal

Equivalencias entre cláusulas y fórmulas

Modelos, consistencia y consecuencia entre cláusulas

Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

### 2. Demostraciones por resolución

### 3. Algoritmos de resolución

### 4. Refinamientos de resolución

### 5. Argumentación por resolución

## Sintaxis de la lógica clausal

- ▶ Un **átomo** es una variable proposicional.  
Variables sobre átomos:  $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$
- ▶ Un **literal** es un átomo ( $p$ ) o la negación de un átomo ( $\neg p$ ).  
Variables sobre literales:  $L, L_1, L_2, \dots$
- ▶ Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.  
Variables sobre cláusulas:  $C, C_1, C_2, \dots$
- ▶ La **cláusula vacía** es el conjunto vacío de literales.  
La cláusula vacía se representa por  $\square$ .
- ▶ **Conjuntos finitos de cláusulas**.  
Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas:  $S, S_1, S_2, \dots$

## Semántica de la lógica clausal

- ▶ Una **interpretación** es una aplicación  $I : VP \rightarrow \mathbb{B}$ .
- ▶ El **valor de un literal positivo**  $p$  en una interpretación  $I$  es  $I(p)$ .
- ▶ El **valor de un literal negativo**  $\neg p$  en una interpretación  $I$  es

$$I(\neg p) = \begin{cases} 1, & \text{si } I(p) = 0; \\ 0, & \text{si } I(p) = 1. \end{cases}$$

- ▶ El **valor de una cláusula**  $C$  en una interpretación  $I$  es

$$I(C) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } L \in C \text{ tal que } I(L) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- ▶ El **valor de un conjunto de cláusulas**  $S$  en una interpretación  $I$  es

$$I(S) = \begin{cases} 1, & \text{si para toda } C \in S, I(C) = 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- ▶ Prop.: En cualquier interpretación  $I$ ,  $I(\square) = 0$ .

## Cláusulas y fórmulas

- ▶ Equivalencias entre cláusulas y fórmulas
  - ▶ Def.: Una cláusula  $C$  y una fórmula  $F$  son **equivalentes** si  $I(C) = I(F)$  para cualquier interpretación  $I$ .
  - ▶ Def.: Un conjunto de cláusulas  $S$  y una fórmula  $F$  son **equivalentes** si  $I(S) = I(F)$  para cualquier interpretación  $I$ .
  - ▶ Def.: Un conjunto de cláusulas  $S$  y un conjunto de fórmulas  $\{F_1, \dots, F_n\}$  son **equivalentes** si, para cualquier interpretación  $I$ ,  $I(S) = 1$  si y sólo si  $I$  es un modelo de  $\{F_1, \dots, F_n\}$ .
- ▶ De cláusulas a fórmulas
  - ▶ Prop.: La cláusula  $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$  es equivalente a la fórmula  $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$ .
  - ▶ Prop.: El conjunto de cláusulas  $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$  es equivalente a la fórmula  $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$ .

## De fórmulas a cláusulas (forma clausal)

- ▶ Def.: Una **forma clausal** de una fórmula  $F$  es un conjunto de cláusulas equivalente a  $F$ .
- ▶ Prop.: Si  $(L_{1,1} \vee \cdots \vee L_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (L_{m,1} \vee \cdots \vee L_{m,n_m})$  es una forma normal conjuntiva de la fórmula  $F$ . Entonces, una forma clausal de  $F$  es
 
$$\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}.$$
- ▶ Ejemplos:
  - ▶ Una forma clausal de  $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$  es  $\{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}\}$ .
  - ▶ Una forma clausal de  $p \rightarrow q$  es  $\{\{\neg p, q\}\}$ .
  - ▶ El conjunto  $\{\{\neg p, q\}, \{r\}\}$  es una forma clausal de las fórmulas  $(p \rightarrow q) \wedge r$  y  $\neg\neg r \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$ .
- ▶ Def.: Una **forma clausal** de un conjunto de fórmulas  $S$  es un conjunto de cláusulas equivalente a  $S$ .
- ▶ Prop.: Si  $S_1, \dots, S_n$  son formas clausales de  $F_1, \dots, F_n$ , entonces  $S_1 \cup \cdots \cup S_n$  es una forma clausal de  $\{F_1, \dots, F_n\}$ .

## Modelos, consistencia y consecuencia entre cláusulas

- ▶ Def.: Una interpretación  $I$  es **modelo** de un conjunto de cláusulas  $S$  si  $I(S) = 1$ .
- ▶ Ej.: La interpretación  $I$  tal que  $I(p) = I(q) = 1$  es un modelo de  $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$ .
- ▶ Def.: Un conjunto de cláusulas es **consistente** si tiene modelos e **inconsistente**, en caso contrario.
- ▶ Ejemplos:
  - ▶  $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$  es consistente.
  - ▶  $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  es inconsistente.
- ▶ Prop.: Si  $\square \in S$ , entonces  $S$  es inconsistente.
- ▶ Def.:  $S \models C$  si para todo modelo  $I$  de  $S$ ,  $I(C) = 1$ .



## Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

- ▶ Prop: Sean  $S_1, \dots, S_n$  formas clausales de las fórmulas  $F_1, \dots, F_n$ .
  - ▶  $\{F_1, \dots, F_n\}$  es consistente syss  $S_1 \cup \dots \cup S_n$  es consistente.
  - ▶ Si  $S$  es una forma clausal de  $\neg G$ , entonces son equivalentes
    1.  $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$ .
    2.  $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$  es inconsistente.
    3.  $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$  es inconsistente.
- ▶ Ejemplo:  $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$  syss  $\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}$  es inconsistente.

## Tema 5: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
  - Regla de resolución proposicional
  - Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución

## Regla de resolución

- Reglas habituales:

$$\text{Modus Ponens: } \frac{p \rightarrow q, \quad p}{q}$$

$$\frac{\{\neg p, q\}, \quad \{p\}}{\{q\}}$$

$$\text{Modus Tollens: } \frac{p \rightarrow q, \quad \neg q}{\neg p}$$

$$\frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}}$$

$$\text{Encadenamiento: } \frac{p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

$$\frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q, r\}}{\{\neg p, r\}}$$

- Regla de resolución proposicional:

$$\frac{\{p_1, \dots, r, \dots, p_m\}, \quad \{q_1, \dots, \neg r, \dots, q_n\}}{\{p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n\}}$$

## Regla de resolución

- ▶ Def.: Sean  $C_1$  una cláusula,  $L$  un literal de  $C_1$  y  $C_2$  una cláusula que contiene el complementario de  $L$ . La **resolvente de  $C_1$  y  $C_2$  respecto de  $L$**  es

$$\text{Res}_L(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$$

- ▶ Ejemplos:
 
$$\begin{aligned} \text{Res}_q(\{p, q\}, \{\neg q, r\}) &= \{p, r\} \\ \text{Res}_q(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) &= \{p, \neg p\} \\ \text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) &= \{q, \neg q\} \\ \text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{q, p\}) &= \{q\} \\ \text{Res}_p(\{p\}, \{\neg p\}) &= \square \end{aligned}$$
- ▶ Def.:  $\text{Res}(C_1, C_2)$  es el conjunto de las resolventes entre  $C_1$  y  $C_2$
- ▶ Ejemplos:
 
$$\begin{aligned} \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}) &= \{\{p, \neg p\}, \{q, \neg q\}\} \\ \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, q\}) &= \{\{q\}\} \\ \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{q, r\}) &= \emptyset \end{aligned}$$
- ▶ Nota:  $\square \notin \text{Res}(\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\})$

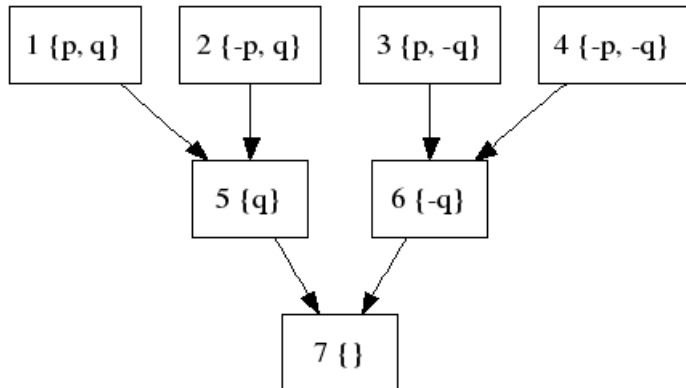
## Ejemplo de refutación por resolución

- Refutación de  $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  :

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

## Ejemplo de grafo de refutación por resolución

- ▶ Grafo de refutación de  $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  :



## Demostraciones por resolución entre cláusulas

Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.

- ▶ La sucesión  $(C_1, \dots, C_n)$  es una **demostración por resolución** de la cláusula  $C$  a partir de  $S$  si  $C = C_n$  y para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  se verifica una de las siguientes condiciones:
  - ▶  $C_i \in S$ ;
  - ▶ existen  $j, k < i$  tales que  $C_i$  es una resolvente de  $C_j$  y  $C_k$
- ▶ La cláusula  $C$  es **demostrable por resolución** a partir de  $S$  si existe una demostración por resolución de  $C$  a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{Res} C$
- ▶ Una **refutación por resolución** de  $S$  es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de  $S$ .
- ▶ Se dice que  $S$  es **refutable por resolución** si existe una refutación por resolución a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{Res} \square$

## Demostraciones por resolución entre fórmulas

► Def.: Sean

$S_1, \dots, S_n$  formas clausales de las fórmulas  $F_1, \dots, F_n$  y

$S$  una forma clausal de  $\neg F$

Una **demostración por resolución** de  $F$  a partir de  $\{F_1, \dots, F_n\}$  es una refutación por resolución de  $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ .

► Def.: La fórmula  $F$  es **demostrable por resolución** a partir de  $\{F_1, \dots, F_n\}$  si existe una demostración por resolución de  $F$  a partir de  $\{F_1, \dots, F_n\}$ . Se representa por  $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$ .

► Ejemplo:  $\{p \vee q, p \leftrightarrow q\} \vdash_{Res} p \wedge q$

- |   |                      |                     |
|---|----------------------|---------------------|
| 1 | $\{p, q\}$           | Hipótesis           |
| 2 | $\{\neg p, q\}$      | Hipótesis           |
| 3 | $\{p, \neg q\}$      | Hipótesis           |
| 4 | $\{\neg p, \neg q\}$ | Hipótesis           |
| 5 | $\{q\}$              | Resolvente de 1 y 2 |
| 6 | $\{\neg q\}$         | Resolvente de 3 y 4 |
| 7 | $\square$            | Resolvente de 5 y 6 |



## Adecuación y completitud de la resolución

- ▶ Prop.: Si  $C$  es una resolvente de  $C_1$  y  $C_2$ , entonces  $\{C_1, C_2\} \models C$ .
- ▶ Prop.: Si  $\square \in S$ , entonces  $S$  es inconsistente.
- ▶ Prop.: Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
  - ▶ (Adecuación) Si  $S \vdash_{Res} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.
  - ▶ (Completitud) Si  $S$  es inconsistente, entonces  $S \vdash_{Res} \square$ .
- ▶ Prop.: Sean  $S$  un conjunto de fórmulas y  $F$  es una fórmula.
  - ▶ (Adecuación) Si  $S \vdash_{Res} F$ , entonces  $S \models F$ .
  - ▶ (Completitud) Si  $S \models F$ , entonces  $S \vdash_{Res} F$ .
- ▶ Nota: Sean  $C_1$  y  $C_2$  las cláusulas  $\{p\}$  y  $\{p, q\}$ , respectivamente. Entonces,
  - ▶  $\{C_1\} \models C_2$ .
  - ▶  $C_2$  no es demostrable por resolución a partir de  $\{C_1\}$ .
  - ▶ La fórmula de forma clausal  $C_1$  es  $F_1 = p$ .
  - ▶ La fórmula de forma clausal  $C_2$  es  $F_2 = p \vee q$ .
  - ▶  $\{F_1\} \vdash_{Res} F_2$ .

## Tema 5: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
  - Algoritmo de resolución por saturación
  - Algoritmo de saturación con simplificación
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución

## Algoritmo de de resolución por saturación

- ▶ Def.: Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.  
 $Res(S) = S \cup (\cup \{Res(C_1, C_2) : C_1, C_2 \in S\})$ .
- ▶ Algoritmo de resolución por saturación

**Entrada:** Un conjunto finito de cláusulas,  $S$ .

**Salida:** *Consistente*, si  $S$  es consistente;  
*Inconsistente*, en caso contrario.

$S' := \emptyset$

**mientras** ( $\square \notin S$ ) y ( $S \neq S'$ ) **hacer**

$S' := S$

$S := Res(S)$

**fmientras**

**si** ( $\square \in S$ ) **entonces**

Devolver *Inconsistente*

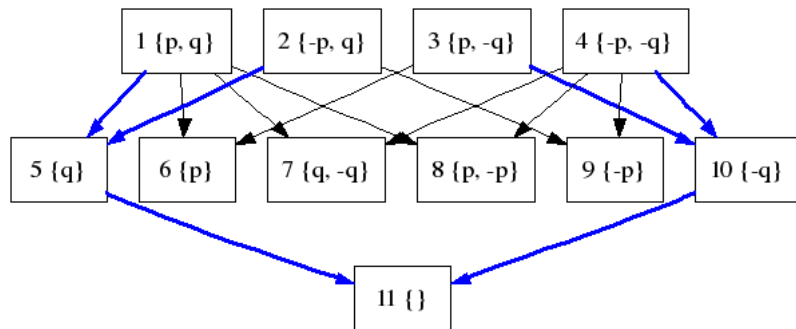
**en caso contrario**

Devolver *Consistente*

**fsi**

- ▶ Prop.: El algoritmo de resolución por saturación es correcto.

## Ejemplo de grafo de resolución por saturación

Grafo de  $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  :

Traza:

Paso	S	S'
0	{1, 2, 3, 4}	$\emptyset$
1	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	{1, 2, 3, 4}
2	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

## Algoritmo de saturación con simplificación

- ▶ Prop.: Si  $S_1 \subseteq S_2$  y  $S_2$  es consistente, entonces  $S_1$  es consistente.
- ▶ Prop.: Una cláusula es una tautología syss contiene un literal y su complementario.
- ▶ Prop.: Sea  $C \in S$  una tautología.  
Entonces  $S$  es consistente syss  $S \setminus \{C\}$  es consistente.
- ▶ Def.: La cláusula  $C$  **subsume** a la cláusula  $D$  si  $C \subset D$  (es decir,  $C \subseteq D$  y  $C \neq D$ ).
- ▶ Prop.: Si  $C$  subsume a  $D$ , entonces  $C \models D$ .
- ▶ Prop.: Sean  $C, D \in S$  tales que  $C$  subsume a  $D$ .  
Entonces  $S$  es consistente syss  $S \setminus \{D\}$  es consistente.
- ▶ Def.: El **simplificado** de un conjunto finito de cláusulas  $S$  es el conjunto obtenido de  $S$  suprimiendo las tautologías y las cláusulas subsumidas por otras; es decir,

$$\text{Simp}(S) = S - \{C \in S : (C \text{ es una tautología}) \text{ ó} \\ (\text{existe } D \in S \text{ tal que } D \subset C)\}$$

## Algoritmo de saturación con simplificación

- ▶ Algoritmo de resolución por saturación con simplificación:

**Entrada:** Un conjunto finito de cláusulas,  $S$ .

**Salida:** *Consistente*, si  $S$  es consistente;  
*Inconsistente*, en caso contrario.

$S' := \emptyset$

**mientras** ( $\square \notin S$ ) y ( $S \neq S'$ ) **hacer**

$S' := S$

$S := \text{Simp}(\text{Res}(S))$

**fmientras**

**si** ( $\square \in S$ ) **entonces**

Devolver *Inconsistente*

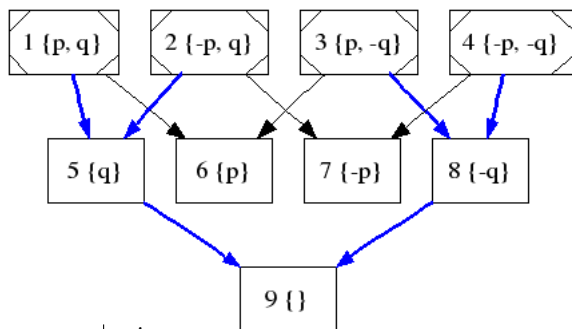
**en caso contrario**

Devolver *Consistente*

**fsi**

- ▶ Prop.: El algoritmo de resolución por saturación con simplificación es correcto.

## Grafo de resolución por saturación con simplificación

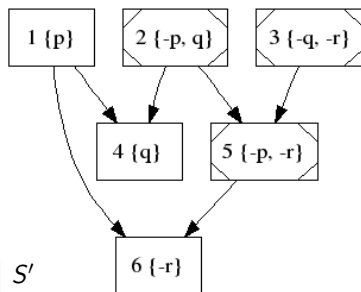
Resolución de  $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  :

Traza:

Paso	S	S'
0	{1, 2, 3, 4}	$\emptyset$
1	{5, 6, 7, 8}	{1, 2, 3, 4}
2	{9}	{5, 6, 7, 8}

## Grafo de resolución por saturación con simplificación

Resolución de  $\{\{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, \neg r\}\}$  :



Traza:

Paso	S	S'
0	$\{1, 2, 3\}$	$\emptyset$
1	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3\}$
2	$\{1, 4, 6\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$
3	$\{1, 4, 6\}$	$\{1, 4, 5, 6\}$

Modelo:  $I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 0$ .



## Tema 5: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
  - Resolución positiva
  - Resolución negativa
  - Resolución unitaria
  - Resolución por entradas
  - Resolución lineal

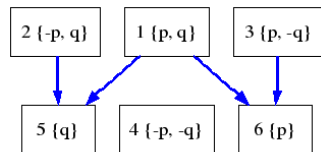
5. Argumentación por resolución

## Resolución positiva

- ▶ Def.: Un **literal positivo** es un átomo.
- ▶ Def.: Una **cláusula positiva** es un conjunto de literales positivos.
- ▶ Def.: Una **demostración por resolución positiva** es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula positiva.
- ▶ La cláusula  $C$  es **demostrable por resolución positiva** a partir del conjunto de cláusulas  $S$  si existe una demostración por resolución positiva de  $C$  a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{ResPos} C$ .
- ▶ Prop.: Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
  - ▶ (**Adecuación**) Si  $S \vdash_{ResPos} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.
  - ▶ (**Completitud**) Si  $S$  es inconsistente, entonces  $S \vdash_{ResPos} \square$ .

## Grafo de resolución positiva

Grafo de  $\{\{p, a\}, \{\neg p, a\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$  :



Traza:

<i>P</i>	<i>S</i>	<i>S'</i>
0	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\emptyset$
1	$\{4, 5, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
2	$\{5, 6, 7, 8\}$	$\{4, 5, 6\}$
3	$\{9\}$	$\{5, 6, 7, 8\}$

## Resolución negativa

- ▶ Def.: Un **literal negativo** es la negación de un átomo.
- ▶ Def.: Una **cláusula negativa** es un conjunto de literales negativos.
- ▶ Def.: Una **demostración por resolución negativa** es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula negativa.
- ▶ La cláusula  $C$  es **demostrable por resolución negativa** a partir del conjunto de cláusulas  $S$  si existe una demostración negativa por resolución de  $C$  a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{ResNeg} C$ .
- ▶ Prop.: Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
  - ▶ (**Adecuación**) Si  $S \vdash_{ResNeg} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.
  - ▶ (**Completitud**) Si  $S$  es inconsistente, entonces  $S \vdash_{ResNeg} \square$ .

## Resolución unitaria

- ▶ Def.: Una **cláusula unitaria** es un conjunto formado por un único literal.
- ▶ Def.: Una **demostración por resolución unitaria** es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula unitaria.
- ▶ La cláusula  $C$  es **demostrable por resolución unitaria** a partir del conjunto de cláusulas  $S$  si existe una demostración por resolución unitaria de  $C$  a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{ResUni} C$ .
- ▶ Prop.: (**Adecuación**) Sea  $S$  un conjunto de cláusulas. Si  $S \vdash_{ResUni} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.

## Resolución unitaria

- ▶ Existen conjuntos de cláusulas  $S$  tales que  $S$  es inconsistente y  $S \not\vdash_{ResUni} \square$ .

$$\text{Dem.: } S = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$$

- ▶ Def.: Una **cláusula de Horn** es un conjunto de literales con un literal positivo como máximo.
- ▶ Ejemplos:  $\{p, \neg q, \neg r\}$ ,  $\{p\}$  y  $\{\neg p, \neg q\}$  son cláusulas de Horn.  
 $\{p, q, \neg r\}$  y  $\{p, r\}$  no son cláusulas de Horn.
- ▶ Prop.: Si  $S$  es un conjunto inconsistente de cláusulas de Horn, entonces  $S \vdash_{ResUni} \square$ .

## Resolución por entradas

- ▶ Def.: Una **demostración por resolución por entradas** a partir de  $S$  es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula de  $S$ .
- ▶ La cláusula  $C$  es **demostrable por resolución por entradas** a partir del conjunto de cláusulas  $S$  si existe una demostración por resolución por entradas de  $C$  a partir de  $S$ . Se representa por  $S \vdash_{ResEnt} C$ .
- ▶ Prop.: (**Adecuación**) Sea  $S$  un conjunto de cláusulas. Si  $S \vdash_{ResEnt} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.
- ▶ Existen conjuntos de cláusulas  $S$  tales que  $S$  es inconsistente y  $S \not\vdash_{ResEnt} \square$ .  
Dem.:  $S = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$
- ▶ Prop.: Si  $S$  es un conjunto inconsistente de cláusulas de Horn, entonces  $S \vdash_{ResEnt} \square$ .

## Resolución lineal

- ▶ Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
  - ▶ La sucesión  $(C_0, C_1, \dots, C_n)$  es una **resolución lineal** a partir de  $S$  si se cumplen las siguientes condiciones:
    1.  $C_0 \in S$ ;
    2. para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existe un  $B \in S \cup \{C_0, \dots, C_{i-1}\}$  tal que  $C_i \in \text{Res}(C_{i-1}, B)$ .

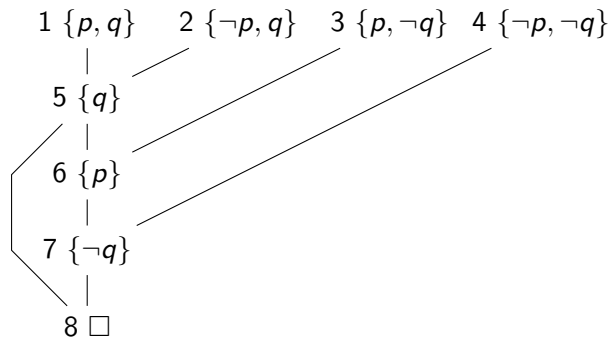
La cláusula  $C_0$  se llama **cláusula base**, las  $C_i$  se llaman **cláusulas centrales** y las  $B$  se llaman **cláusulas laterales**.
  - ▶ La cláusula  $C$  es **deducible por resolución lineal** a partir de  $S$  si existe una deducción por resolución lineal a partir de  $S$ ,  $(C_0, \dots, C_n)$ , tal que  $C_n = C$ . Se representa por  $S \vdash_{\text{ResLin}} C$ .
- ▶ Prop.: Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
  - ▶ (**Adecuación**) Si  $S \vdash_{\text{ResLin}} \square$ , entonces  $S$  es inconsistente.
  - ▶ (**Completitud**) Si  $S$  es inconsistente, entonces  $S \vdash_{\text{ResLin}} \square$ .



## Resolución lineal

- Ejemplo: Resolución lineal de

$\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$



## Tema 5: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución
  - Formalización de argumentación por resolución
  - Decisión de argumentación por resolución

## Formalización de argumentación por resolución

- ▶ Problema de los animales: Se sabe que
  1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
  2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
  3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
  4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras.  
 Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

- ▶ Formalización:
 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tiene\_pelos} \vee \text{da\_leche} \rightarrow \text{es\_mamífero}, \\ \text{es\_mamífero} \wedge (\text{tiene\_pezuñas} \vee \text{rumia}) \rightarrow \text{es\_ungulado}, \\ \text{es\_ungulado} \wedge \text{tiene\_cuello\_largo} \rightarrow \text{es\_jirafa}, \\ \text{es\_ungulado} \wedge \text{tiene\_rayas\_negras} \rightarrow \text{es\_cebra}, \\ \text{tiene\_pelos} \wedge \text{tiene\_pezuñas} \wedge \text{tiene\_rayas\_negras} \end{array} \right\}$$

$$\vdash_{Res} \text{es\_cebra}$$

## Decisión de argumentación por resolución

1	$\{\neg \text{tiene\_pelos}, \text{es\_mamífero}\}$	Hipótesis
2	$\{\neg \text{da\_leche}, \text{es\_mamífero}\}$	Hipótesis
3	$\{\neg \text{es\_mamífero}, \neg \text{tiene\_pezuñas}, \text{es\_ungulado}\}$	Hipótesis
4	$\{\neg \text{es\_mamífero}, \neg \text{rumia}, \text{es\_ungulado}\}$	Hipótesis
5	$\{\neg \text{es\_ungulado}, \neg \text{tiene\_cuello\_largo}, \text{es\_jirafa}\}$	Hipótesis
6	$\{\neg \text{es\_ungulado}, \neg \text{tiene\_rayas\_negras}, \text{es\_cebra}\}$	Hipótesis
7	$\{\text{tiene\_pelos}\}$	Hipótesis
8	$\{\text{tiene\_pezuñas}\}$	Hipótesis
9	$\{\text{tiene\_rayas\_negras}\}$	Hipótesis
10	$\{\neg \text{es\_cebra}\}$	Hipótesis
11	$\{\text{es\_mamífero}\}$	Resolvente de 1 y 7
12	$\{\neg \text{tiene\_pezuñas}, \text{es\_ungulado}\}$	Resolvente de 11 y 3
13	$\{\text{es\_ungulado}\}$	Resolvente de 12 y 8
14	$\{\neg \text{tiene\_rayas\_negras}, \text{es\_cebra}\}$	Resolvente de 13 y 6
15	$\{\text{es\_cebra}\}$	Resolvente de 14 y 9
16	$\square$	Resolvente de 15 y 10

## Bibliografía

1. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.)*. (Springer, 2001).  
Cap. 4: Propositional calculus: resolution and BDDs.
2. C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973).  
Cap. 5.2: The resolution principle for the propositional logic.
3. N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001).  
Cap. 14: La resolución en el cálculo proposicional.
4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003).  
Cap. 5.7: El principio de resolución en lógica proposicional.
5. U. Schöning *Logic for Computer Scientists* (Birkäuser, 1989).  
Cap. 1.5: Resolution.