

# Lógica matemática y fundamentos (2014–15)

## Tema 12: Resolución en lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez  
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 12: Resolución en lógica de primer orden

1. Introducción
2. Unificación
3. Resolución de primer orden

## Tema 12: Resolución en lógica de primer orden

### 1. Introducción

Ejemplos de consecuencia mediante resolución

### 2. Unificación

### 3. Resolución de primer orden

## Ejemplos de consecuencia mediante resolución

► Ejemplo 1:

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x)\} \models \exists x Q(x)$$

se reduce a

$$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\} \text{ es inconsistente.}$$

Demostración:

- |   |                       |  |
|---|-----------------------|--|
| 1 | $\{\neg P(x), Q(x)\}$ | Hipótesis                                |
| 2 | $\{P(a)\}$            | Hipótesis                                |
| 3 | $\{\neg Q(z)\}$       | Hipótesis                                |
| 4 | $\{Q(a)\}$            | Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a]$ |
| 5 | □                     | Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = [z/a]$ |

## Ejemplos de consecuencia mediante resolución

► Ejemplo 2:

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models \forall x [P(x) \rightarrow R(x)]$$

se reduce a

$$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$$

es inconsistente.

Demostración:

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg Q(y), R(y)\}$	Hipótesis
3	$\{P(a)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg R(a)\}$	Hipótesis
5	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 3 con $\sigma = [x/a]$
6	$\{R(a)\}$	Resolvente de 2 y 5 con $\sigma = [y/a]$
5	□	Resolvente de 4 y 6 con $\sigma = \epsilon$

# Tema 12: Resolución en lógica de primer orden

## 1. Introducción

## 2. Unificación

Unificadores

Composición de sustituciones

Comparación de sustituciones

Unificador de máxima generalidad

Algoritmo de unificación

## 3. Resolución de primer orden

## Unificadores

- ▶ Def.: La sustitución  $\sigma$  es un **unificador** de los términos  $t_1$  y  $t_2$  si  $t_1\sigma = t_2\sigma$ .
- ▶ Def.: Los términos  $t_1$  y  $t_2$  son **unificables** si tienen algún unificador.
- ▶ Def.:  $t$  es una **instancia común** de  $t_1$  y  $t_2$  si existe una sustitución  $\sigma$  tal que  $t = t_1\sigma = t_2\sigma$ .
- ▶ Ejemplos:

$t_1$	$t_2$	Unificador	Instancia común
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(z), y/z]$	$f(g(z), g(z))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(y), z/y]$	$f(g(y), g(y))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(a), y/a]$	$f(g(a), g(a))$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[x/a, y/a]$	$f(a, a)$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[y/x]$	$f(x, x)$
$f(x, y)$	$g(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x, x)$	$f(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x)$	$f(g(x))$	No tiene	No tiene

- ▶ Nota: Las anteriores definiciones se extienden a conjuntos de términos y de literales.

## Composición de sustituciones e identidad

### ► Composición de sustituciones:

- Def.: La **composición** de las sustituciones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  es la sustitución  $\sigma_1\sigma_2$  definida por  $x(\sigma_1\sigma_2) = (x\sigma_1)\sigma_2$ , para toda variable  $x$ .
- Ejemplo: Si  $\sigma_1 = [x/f(z, a), y/w]$  y  $\sigma_2 = [x/b, z/g(w)]$ , entonces
  - $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z, a)\sigma_2 = f(z\sigma_2, a\sigma_2) = f(g(w), a)$
  - $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$
  - $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$
  - $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

Por tanto,  $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w), a), y/w, z/g(w)]$ .

- Def.: La **substitución identidad** es la sustitución  $\epsilon$  tal que, para todo  $x$ ,  $x\epsilon = x$ .
- Propiedades:
  1. Asociativa:  $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$
  2. Neutro:  $\sigma\epsilon = \epsilon\sigma = \sigma$ .



## Comparación de sustituciones

- ▶ Def.: La sustitución  $\sigma_1$  es **más general que** la  $\sigma_2$  si existe una sustitución  $\sigma_3$  tal que  $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_3$ . Se representa por  $\sigma_2 \leq \sigma_1$ .
- ▶ Def.: Las sustituciones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son **equivalentes** si  $\sigma_1 \leq \sigma_2$  y  $\sigma_2 \leq \sigma_1$ . Se representa por  $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ .
- ▶ Ejemplos: Sean  $\sigma_1 = [x/g(z), y/z]$ ,  $\sigma_2 = [x/g(y), z/y]$  y  $\sigma_3 = [x/g(a), y/a]$ . Entonces,
  1.  $\sigma_1 = \sigma_2[y/z]$
  2.  $\sigma_2 = \sigma_1[z/y]$
  3.  $\sigma_3 = \sigma_1[z/a]$
  4.  $\sigma_1 \equiv \sigma_2$
  5.  $\sigma_3 \leq \sigma_1$
- ▶ Ejemplo:  $[x/a, y/a] \leq [y/x]$ , ya que  $[x/a, y/a] = [y/x][x/a, y/a]$ .

## Unificador de máxima generalidad

- ▶ Def.: La sustitución  $\sigma$  es un **unificador de máxima generalidad (UMG)** de los términos  $t_1$  y  $t_2$  si
  - $\sigma$  es un unificador de  $t_1$  y  $t_2$ .
  - $\sigma$  es más general que cualquier unificador de  $t_1$  y  $t_2$ .
- ▶ Ejemplos:
  1.  $[x/g(z), y/z]$  es un UMG de  $f(x, g(z))$  y  $f(g(y), x)$ .
  2.  $[x/g(y), z/y]$  es un UMG de  $f(x, g(z))$  y  $f(g(y), x)$ .
  3.  $[x/g(a), y/a]$  no es un UMG de  $f(x, g(z))$  y  $f(g(y), x)$ .
- ▶ Nota: Las anterior definición se extienden a conjuntos de términos y de literales.

## Unificación de listas de términos

- ▶ Notación de lista:
  - ▶  $(a_1, \dots, a_n)$  representa una lista cuyos elementos son  $a_1, \dots, a_n$ .
  - ▶  $(a|R)$  representa una lista cuyo primer elemento es  $a$  y resto es  $R$ .
  - ▶  $()$  representa la lista vacía.
- ▶ Unificadores de listas de términos:
  - ▶ Def.:  $\sigma$  es un **unificador** de  $(s_1 \dots, s_n)$  y  $(t_1 \dots, t_n)$  si  $s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma$ .
  - ▶ Def.:  $(s_1 \dots, s_n)$  y  $(t_1 \dots, t_n)$  son **unificables** si tienen algún unificador.
  - ▶ Def.:  $\sigma$  es un **unificador de máxima generalidad (UMG)** de  $(s_1 \dots, s_n)$  y  $(t_1 \dots, t_n)$  si  $\sigma$  es un unificador de  $(s_1 \dots, s_n)$  y  $(t_1 \dots, t_n)$  más general que cualquier otro.
- ▶ Aplicación de una sustitución a una lista de ecuaciones:
  - ▶  $(s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)\sigma = (s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma)$ .

## Algoritmo de unificación de listas de términos

- ▶ Entrada: Lista de ecuaciones  $L = (s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)$  y sustitución  $\sigma$ .
- ▶ Salida:  
Un UMG de las listas  $(s_1 \dots, s_n)\sigma$  y  $(t_1 \dots, t_n)\sigma$ , si son unificables;  
“No unificables”, en caso contrario.

## Algoritmo de unificación de listas de términos

► Procedimiento  $\text{unif}(L, \sigma)$ :

1. Si  $L = ()$ , entonces  $\text{unif}(L, \sigma) = \sigma$ .
2. Si  $L = (t = t|L')$ , entonces  $\text{unif}(L, \sigma) = \text{unif}(L', \sigma)$ .
3. Si  $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_m)|L')$ , entonces  $\text{unif}(L, \sigma) = \text{unif}((t_1 = t'_1, \dots, t_m = t'_m|L'), \sigma)$ .
4. Si  $L = (x = t|L')$  (ó  $L = (t = x|L')$ ) y  $x$  no aparece en  $t$ , entonces  $\text{unif}(L, \sigma) = \text{unif}(L'[x/t], \sigma[x/t])$ .
5. Si  $L = (x = t|L')$  (ó  $L = (t = x|L')$ ) y  $x$  aparece en  $t$ , entonces  $\text{unif}(L, \sigma) = \text{"No unificables"}$ .
6. Si  $L = (f(t_1, \dots, t_m) = g(t'_1 \dots, t'_m)|L')$ , entonces  $\text{unif}(L, \sigma) = \text{"No unificables"}$ .
7. Si  $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_p)|L')$  y  $m \neq p$ , entonces  $\text{unif}(L, \sigma) = \text{"No unificables"}$ .

## Algoritmo de unificación de dos términos

- ▶ Entrada: Dos términos  $t_1$  y  $t_2$ .
- ▶ Salida: Un UMG de  $t_1$  y  $t_2$ , si son unificables;  
“No unificables”, en caso contrario.
- ▶ Procedimiento:  $\text{unif}((t_1 = t_2), \epsilon)$ .

- ▶ Ejemplo 1: Unificar  $f(x, g(z))$  y  $f(g(y), x)$ :

$$\begin{aligned}
 & \text{unif}((f(x, g(z)) = f(g(y), x)), \epsilon) \\
 = & \text{unif}((x = g(y), g(z) = x), \epsilon) && \text{por 3} \\
 = & \text{unif}((g(z) = x)[x/g(y)], \epsilon[x/g(y)]) && \text{por 4} \\
 = & \text{unif}((g(z) = g(y)), [x/g(y)]) \\
 = & \text{unif}((z = y), [x/g(y)]) && \text{por 3} \\
 = & \text{unif}(), [x/g(y)][z/y] && \text{por 4} \\
 = & \text{unif}(), [x/g(y), z/y] \\
 = & [x/g(y), z/y] && \text{por 1}
 \end{aligned}$$

## Ejemplos de unificación

- Ejemplo 2: Unificar  $f(x, b)$  y  $f(a, y)$ :

$$\begin{aligned} & \text{unif}((f(x, b) = f(a, y)), \epsilon) \\ &= \text{unif}((x = a, b = y), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((b = y)[x/a], \epsilon[x/a]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((b = y), [x/a]) \\ &= \text{unif}(), [x/a][y/b] && \text{por 4} \\ &= [x/a, y/b] && \text{por 1} \end{aligned}$$

- Ejemplo 3: Unificar  $f(x, x)$  y  $f(a, b)$ :

$$\begin{aligned} & \text{unif}((f(x, x) = f(a, b)), \epsilon) \\ &= \text{unif}((x = a, x = b), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((x = b)[x/a], \epsilon[x/a]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((a = b), [x/a]) \\ &= \text{"No unificable"} && \text{por 6} \end{aligned}$$

## Ejemplos de unificación

- Ejemplo 4: Unificar  $f(x, g(y))$  y  $f(y, x)$ :

$$\begin{aligned} & \text{unif}((f(x, g(y)) = f(y, x)), \epsilon) \\ &= \text{unif}((x = y, g(y) = x), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((g(y) = x)[x/y], \epsilon[x/y]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((g(y) = y), [x/y]) \\ &= \text{"No unificable"} && \text{por 5} \end{aligned}$$

- Ejemplo 5: Unificar  $j(w, a, h(w))$  y  $j(f(x, y), x, z)$

$$\begin{aligned} & \text{unif}((j(w, a, h(w)) = j(f(x, y), x, z))\epsilon) \\ &= \text{unif}((w = f(x, y), a = x, h(w) = z), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((a = x, h(w) = z)[w/f(x, y)], \epsilon[w/f(x, y)]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((a = x, h(f(x, y)) = z), [w/f(x, y)]) \\ &= \text{unif}((h(f(x, y)) = z)[x/a], [w/f(x, y)][x/a]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((h(f(a, y)) = z), [w/f(a, y), x/a]) \\ &= \text{unif}((, [w/f(a, y), x/a][z/h(f(a, y))]) && \text{por 4} \\ &= [w/f(a, y), x/a, z/h(f(a, y))] && \text{por 1} \end{aligned}$$



## Ejemplos de unificación

- ▶ Ejemplo 6: Unificar  $j(w, a, h(w))$  y  $j(f(x, y), x, y)$ 
  - $\text{unif}((j(w, a, h(w)) = j(f(x, y), x, y)), \epsilon)$
  - $= \text{unif}((w = f(x, y), a = x, h(w) = y), \epsilon)$  por 3
  - $= \text{unif}((a = x, h(w) = y)[w/f(x, y)], \epsilon[w/f(x, y)])$  por 4
  - $= \text{unif}((a = x, h(f(x, y)) = y), [w/f(x, y)])$
  - $= \text{unif}((h(f(x, y)) = y)[x/a], [w/f(x, y)][x/a])$  por 4
  - $= \text{unif}((h(f(a, y)) = y), [w/f(a, y), x/a])$
  - $= \text{"No unificable"}$  por 5
  
- ▶ Ejemplo 7: Unificar  $f(a, y)$  y  $f(a, b)$ :
  - $\text{unif}((f(a, y) = f(a, b)), \epsilon)$
  - $= \text{unif}((a = a, y = b), \epsilon)$  por 3
  - $= \text{unif}((y = b), \epsilon)$  por 2
  - $= \text{unif}(( ), [y/b])$  por 4
  - $= [y/b]$  por 1

## Tema 12: Resolución en lógica de primer orden

### 1. Introducción

### 2. Unificación

### 3. Resolución de primer orden

Separación de variables

Resolvente binaria

Factorización

Demostraciones por resolución

Adecuación y completitud de la resolución

Decisión de no-consecuencia por resolución

## Separación de variables

- ▶ Def.: La sustitución  $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$  es un **renombramiento** si todos los  $t_i$  son variables.
- ▶ Prop.: Si  $\theta$  es un renombramiento, entonces  $C \equiv C\theta$ .
- ▶ Def.: Las cláusulas  $C_1$  y  $C_2$  **están separadas** si no tienen ninguna variable común.
- ▶ Def.: Una **separación de las variables de  $C_1$  y  $C_2$**  es un par de renombramientos  $(\theta_1, \theta_2)$  tales que  $C_1\theta_1$  y  $C_2\theta_2$  están separadas.
- ▶ Ejemplo: Una separación de variables de

$$C_1 = \{P(x), Q(x, y)\} \text{ y } C_2 = \{R(f(x, y))\}$$

es

$$(\theta_1 = [x/x_1, y/y_1], \theta_2 = [x/x_2, y/y_2]).$$

## Resolvente binaria

- ▶ Def.: La cláusula  $C$  es una resolvente binaria de las cláusulas  $C_1$  y  $C_2$  si existen una separación de variables  $(\theta_1, \theta_2)$  de  $C_1$  y  $C_2$ , un literal  $L_1 \in C_1$ , un literal  $L_2 \in C_2$  y un UMG  $\sigma$  de  $L_1\theta_1$  y  $L_2^c\theta_2$  tales que

$$C = (C_1\theta_1\sigma \setminus \{L_1\theta_1\sigma\}) \cup (C_2\theta_2\sigma \setminus \{L_2\theta_2\sigma\}).$$

- ▶ Ejemplo: Sean

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\neg P(x), Q(f(x))\}, & C_2 &= \{\neg Q(x), R(g(x))\}, \\ L_1 &= Q(f(x)), & L_2 &= \neg Q(x), \\ \theta_1 &= [x/x_1], & \theta_2 &= [x/x_2], \\ L_1\theta_1 &= Q(f(x_1)), & L_2^c\theta_2 &= Q(x_2), \\ \sigma &= [x_2/f(x_1)] \end{aligned}$$

Entonces,  $C = \{\neg P(x_1), R(g(f(x_1)))\}$  es una resolvente binaria de  $C_1$  y  $C_2$ .

## Factorización

- ▶ Def.: La cláusula  $C$  es un factor de la cláusula  $D$  si existen dos literales  $L_1$  y  $L_2$  en  $D$  que son unificables y  $C = D\sigma \setminus \{L_2\sigma\}$  donde  $\sigma$  es un UMG de  $L_1$  y  $L_2$ .

- ▶ Ejemplo: Sean

$$D = \{P(x, y), P(y, x), Q(a)\}$$

$$L_1 = P(x, y)$$

$$L_2 = P(y, x)$$

$$\sigma = [y/x]$$

Entonces,

$$C = \{P(x, x), Q(a)\} \text{ es un factor de } D.$$

## Ejemplos de refutación por resolución

## ► Refutación de

$$S = \{ \{ \neg P(x, f(x, y)) \}, \{ P(a, z), \neg Q(z, v) \}, \{ Q(u, a) \} \}$$

- |   |                               |  |
|---|-------------------------------|--|
| 1 | $\{ \neg P(x, f(x, y)) \}$    | Hipótesis  |
| 2 | $\{ P(a, z), \neg Q(z, v) \}$ | Hipótesis  |
| 3 | $\{ Q(u, a) \}$               | Hipótesis  |
| 4 | $\{ \neg Q(f(a, y), v) \}$    | Resolvente de 1 y 2<br>con $\sigma = [x/a, z/f(a, y)]$ |
| 5 | □                             | Resolvente de 3 y 4<br>con $\sigma = [u/f(a, y), v/a]$ |

► Refutación de  $S = \{ \{ P(x) \}, \{ \neg P(f(x)) \} \}$ 

- |   |                      |   |
|---|----------------------|---|
| 1 | $\{ P(x) \}$         | Hipótesis   |
| 2 | $\{ \neg P(f(x)) \}$ | Hipótesis   |
| 3 | □                    | Resolvente de 1 y 2 con<br>con $\theta_1 = \epsilon, \theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$ |

## Ejemplos de refutación por resolución

- ▶ Refutación de  $S = \{\{P(x, y), P(y, x)\}, \{\neg P(u, v), \neg P(v, u)\}\}$ 
  - 1  $\{P(x, y), P(y, x)\}$  Hipótesis
  - 2  $\{\neg P(u, v), \neg P(v, u)\}$  Hipótesis
  - 3  $\{P(x, x)\}$  Factor de 1 con  $[y/x]$
  - 4  $\{\neg P(u, u)\}$  Factor de 2 con  $[v/u]$
  - 5  $\square$  Resolvente de 3 y 4 con  $[x/u]$

## Demostraciones de cláusulas por resolución

- ▶ Sea  $S$  un conjunto de cláusulas.
- ▶ La sucesión  $(C_1, \dots, C_n)$  es una demostración por resolución de la cláusula  $C$  a partir de  $S$  si  $C = C_n$  y para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  se verifica una de las siguientes condiciones:
  - $C_i \in S$ ;
  - existen  $j, k < i$  tales que  $C_i$  es una resolvente de  $C_j$  y  $C_k$
  - existe  $j < i$  tal que  $C_i$  es un factor de  $C_j$
- ▶ La cláusula  $C$  es demostrable por resolución a partir de  $S$  si existe una demostración por resolución de  $C$  a partir de  $S$ .
- ▶ Una refutación por resolución de  $S$  es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de  $S$ .
- ▶ Se dice que  $S$  es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de  $S$ .



## Demostraciones de fórmulas por resolución

- ▶ Def.: Sean  $S_1, \dots, S_n$  formas clausales de las fórmulas  $F_1, \dots, F_n$  y  $S$  una forma clausal de  $\neg F$ . Una **demostración por resolución de  $F$  a partir de  $\{F_1, \dots, F_n\}$**  es una refutación por resolución de  $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ .
- ▶ Def.: La fórmula  $F$  es **demostrable por resolución a partir de  $\{F_1, \dots, F_n\}$**  si existe una demostración por resolución de  $F$  a partir de  $\{F_1, \dots, F_n\}$ .  
Se representa por  $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$ .

- ▶ Ejemplo: (tema 8 p. 21)

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x)\} \vdash_{Res} \exists x Q(x)$$

- |   |                       |                                 |
|---|-----------------------|---------------------------------|
| 1 | $\{\neg P(x), Q(x)\}$ | Hipótesis                       |
| 2 | $\{P(a)\}$            | Hipótesis                       |
| 3 | $\{\neg Q(z)\}$       | Hipótesis                       |
| 4 | $\{Q(a)\}$            | Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$ |
| 5 | $\square$             | Resolvente de 3 y 4 con $[z/a]$ |

## Ejemplos de demostraciones por resolución

- ▶ Ejemplo: (tema 8 p. 21)

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)] \vdash_{Res} \forall x [P(x) \rightarrow R(x)]\}$$

1  $\{\neg P(x), Q(x)\}$  Hipótesis

2  $\{\neg Q(y), R(y)\}$  Hipótesis

3  $\{P(a)\}$  Hipótesis

4  $\{\neg R(a)\}$  Hipótesis

5  $\{Q(a)\}$  Resolvente de 1 y 3 con  $[x/a]$

6  $\{R(a)\}$  Resolvente de 5 y 2 con  $[y/a]$

5  $\square$  Resolvente de 6 y 4

- ▶ Ejemplo: (tema 6 p. 55)  $\vdash_{Res} \exists x [P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$

1  $\{P(x)\}$  Hipótesis

2  $\{\neg P(f(x))\}$  Hipótesis

3  $\square$  Resolvente de 1 y 2 con  $\theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x)']$

## Ejemplos de demostraciones por resolución

► Ejemplo:  $\vdash_{Res} \forall x \exists y \neg(P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y))$

– Forma clausal:

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \exists y \neg(P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y)) \\ \equiv & \neg \forall x \exists y \neg((P(y, x) \rightarrow \neg P(y, y)) \wedge (\neg P(y, y) \rightarrow P(y, x))) \\ \equiv & \neg \forall x \exists y \neg((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (\neg \neg P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \equiv & \neg \forall x \exists y \neg((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \equiv & \exists x \forall y \neg \neg((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \equiv & \exists x \forall y ((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \approx & \forall y ((\neg P(y, a) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, a))) \\ \equiv & \{\{\neg P(y, a), \neg P(y, y)\}, \{P(y, y), P(y, a)\}\} \end{aligned}$$

– Refutación:

- |   |                                  |                         |
|---|----------------------------------|-------------------------|
| 1 | $\{\neg P(y, a), \neg P(y, y)\}$ | Hipótesis               |
| 2 | $\{P(y, y), P(y, a)\}$           | Hipótesis               |
| 3 | $\{\neg P(a, a)\}$               | Factor de 1 con $[y/a]$ |
| 4 | $\{P(a, a)\}$                    | Factor de 2 con $[y/a]$ |
| 5 | $\square$                        | Resolvente de 3 y 4     |

## Paradoja del barbero de Russell

En una isla pequeña hay sólo un barbero. El gobernador de la isla ha publicado la siguiente norma: *“El barbero afeita a todas las personas que no se afeitan a sí misma y sólo a dichas personas”*. Demostrar que la norma es inconsistente.

– Representación:  $\forall x [afeita(b, x) \leftrightarrow \neg afeita(x, x)]$

– Forma clausal:

$$\forall x [afeita(b, x) \leftrightarrow \neg afeita(x, x)]$$

$$\equiv \forall x [(afeita(b, x) \rightarrow \neg afeita(x, x)) \wedge (\neg afeita(x, x) \rightarrow afeita(b, x))]$$

$$\equiv \forall x [(\neg afeita(b, x) \vee \neg afeita(x, x)) \wedge (\neg \neg afeita(x, x) \vee afeita(b, x))]$$

$$\equiv \forall x [(\neg afeita(b, x) \vee \neg afeita(x, x)) \wedge (afeita(x, x) \vee afeita(b, x))]$$

$$\equiv \{ \{ \neg afeita(b, x), \neg afeita(x, x) \}, \{ afeita(x, x), afeita(b, x) \} \}$$

– Refutación:

1  $\{ \neg afeita(b, x), \neg afeita(x, x) \}$  Hipótesis

2  $\{ afeita(x, x), afeita(b, x) \}$  Hipótesis

3  $\{ \neg afeita(b, b) \}$  Factor de 1 con  $[x/b]$

4  $\{ afeita(b, b) \}$  Factor de 2 con  $[x/b]$

5  $\square$  Resolvente de 3 y 4

## Adecuación y completitud de la resolución

### ► Propiedades:

- Si  $C$  es una resolvente de  $C_1$  y  $C_2$ , entonces  $\{C_1, C_2\} \models C$ .
- Si  $D$  es un factor de  $C$  entonces  $C \models D$ .
- Si  $\square \in S$ , entonces  $S$  es inconsistente.
- Si el conjunto de cláusulas  $S$  es refutable por resolución, entonces  $S$  es inconsistente.

- Teor.: El cálculo de resolución (para la lógica de primer orden sin igualdad) es adecuado y completo; es decir,

$$\text{Adecuado: } S \vdash_{Res} F \quad \implies \quad S \models F$$

$$\text{Completo: } S \models F \quad \implies \quad S \vdash_{Res} F$$

## Decisión de no-consecuencia por resolución

- ▶ Enunciado: Comprobar, por resolución, que  $\forall x [P(x) \vee Q(x)] \not\models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ .

- ▶ Reducción 1: Comprobar que es consistente  $\{\forall x [P(x) \vee Q(x)], \neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))\}$

- ▶ Reducción 2: Comprobar que es consistente  $\{\{P(x), Q(x)\}, \{\neg P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\}$

- ▶ Resolución:

1  $\{P(x), Q(x)\}$  Hipótesis

2  $\{\neg P(a)\}$  Hipótesis

3  $\{\neg Q(b)\}$  Hipótesis

4  $\{Q(a)\}$  Resolvente de 1 y 2

5  $\{P(b)\}$  Resolvente de 1 y 3

- ▶ Modelo:  $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$ .

## Bibliografía

1. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1996) pp. 137–141.
2. M.L. Bonet *Apuntes de LPO*. (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 34–40.
3. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 70–99.
4. M. Genesereth *Computational Logic (Chapter 9: Relational Resolution)* (Stanford University, 2003)
5. S. Hölldobler *Computational logic*. (U. de Dresden, 2004) pp. 71–74.
6. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 138–164.
7. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 50–61.
8. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 79–96.