

# Lógica matemática y fundamentos (2014–15)

## Tema 3: Tableros semánticos

José A. Alonso Jiménez  
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 3: Tableros semánticos

1. Búsqueda de modelos
2. Notación uniforme
3. Procedimiento de completación de tableros
4. Modelos por tableros semánticos
5. Consistencia mediante tableros
6. Teorema por tableros
7. Deducción por tableros

## Tema 3: Tableros semánticos

1. Búsqueda de modelos
2. Notación uniforme
3. Procedimiento de completación de tableros
4. Modelos por tableros semánticos
5. Consistencia mediante tableros
6. Teorema por tableros
7. Deducción por tableros

## Búsqueda exitosa de modelos

- Búsqueda de modelos de  $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$

$$I \models \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$$

$$\text{syss } I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))\}$$

$$\text{syss } I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge r)\}$$

$$\text{syss } I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge r\}$$

$$\text{syss } I \models \{p, r, \neg p \vee \neg q\}$$

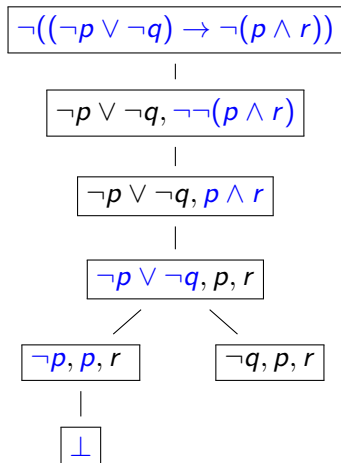
$$\text{syss } I \models \{p, r, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\}$$

$$\text{syss } I \models \{\perp\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\}$$

- Modelos de  $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$ :

Las interpretaciones  $I$  tales que  $I(p) = 1$ ,  $I(q) = 0$  e  $I(r) = 1$ .

## Búsqueda exitosa de modelos por tableros semánticos



## Búsqueda fallida de modelos

- Búsqueda de modelos de  $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$ .

$$I \models \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$$

$$\text{syss } I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))\}$$

$$\text{syss } I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge q)\}$$

$$\text{syss } I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge q\}$$

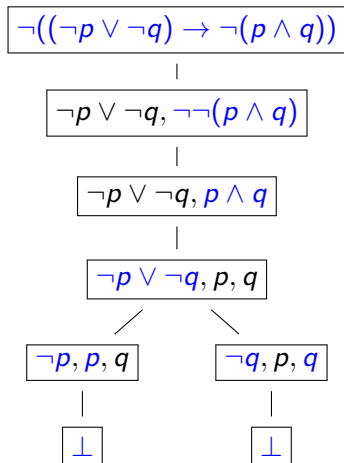
$$\text{syss } I \models \{p, q, \neg p \vee \neg q\}$$

$$\text{syss } I \models \{p, q, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, q, \neg q\}$$

$$\text{syss } I \models \{\perp\} \text{ ó } I \models \{\perp\}$$

- La fórmula  $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$  no tiene modelos (es insatisfacible).

## Búsqueda fallida de modelos por tableros semánticos



## Tema 3: Tableros semánticos

1. Búsqueda de modelos
2. **Notación uniforme**
3. Procedimiento de completación de tableros
4. Modelos por tableros semánticos
5. Consistencia mediante tableros
6. Teorema por tableros
7. Deducción por tableros



## Notación uniforme: Literales y dobles negaciones

- ▶ Literales
  - ▶ Un **literal** es un átomo o la negación de un átomo (p.e.  $p, \neg p, q, \neg q, \dots$ ).
  - ▶  $I \models p$  syss  $I(p) = 1$ .
  - ▶  $I \models \neg p$  syss  $I(p) = 0$ .
- ▶ Dobles negaciones
  - ▶  $F$  es una **doble negación** si es de la forma  $\neg\neg G$ .
  - ▶  $I \models \neg\neg G$  syss  $I \models G$ .
- ▶ Reducción de modelos:
  - ▶  $I \models F \wedge G$  syss  $I \models F$  e  $I \models G$ .
  - ▶  $I \models F \vee G$  syss  $I \models F$  ó  $I \models G$ .

## Notación uniforme: Fórmulas alfa y beta

- ▶ Las **fórmulas alfa**, junto con sus componentes, son

$F$	$F_1$	$F_2$
$A_1 \wedge A_2$	$A_1$	$A_2$
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	$A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

- ▶ Si  $F$  es alfa con componentes  $F_1$  y  $F_2$ , entonces  $F \equiv F_1 \wedge F_2$ .
- ▶ Las **fórmulas beta**, junto con sus componentes, son

$F$	$F_1$	$F_2$
$B_1 \vee B_2$	$B_1$	$B_2$
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	$B_2$
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

- ▶ Si  $F$  es beta con componentes  $F_1$  y  $F_2$ , entonces  $F \equiv F_1 \vee F_2$ .

## Tema 3: Tableros semánticos

1. Búsqueda de modelos
2. Notación uniforme
- 3. Procedimiento de completación de tableros**
4. Modelos por tableros semánticos
5. Consistencia mediante tableros
6. Teorema por tableros
7. Deducción por tableros

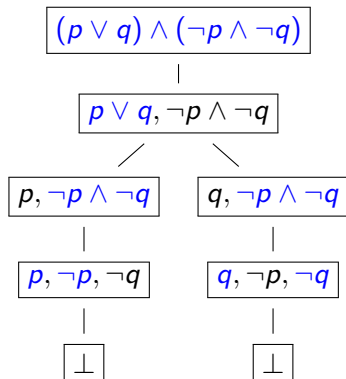
## Tablero del conjunto de fórmulas $S$

Un **tablero** del conjunto de fórmulas  $S$  es un árbol construido mediante las reglas:

- ▶ El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta  $S$  es un tablero de  $S$ .
- ▶ Sea  $\mathcal{T}$  un tablero de  $S$  y  $S_1$  la etiqueta de una hoja de  $\mathcal{T}$ .
  1. Si  $S_1$  contiene una **fórmula y su negación**, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de  $S_1$  el nodo etiquetado con  $\{\perp\}$  es un tablero de  $S$ .
  2. Si  $S_1$  contiene una **doble negación**  $\neg\neg F$ , entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de  $S_1$  el nodo etiquetado con  $(S_1 \setminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$  es un tablero de  $S$ .
  3. Si  $S_1$  contiene una **fórmula alfa**  $F$  de componentes  $F_1$  y  $F_2$ , entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de  $S_1$  el nodo etiquetado con  $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$  es un tablero de  $S$ .
  4. Si  $S_1$  contiene una **fórmula beta**  $F$  de componentes  $F_1$  y  $F_2$ , entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de  $S_1$  los nodos etiquetados con  $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1\}$  y  $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_2\}$  es un tablero de  $S$ .

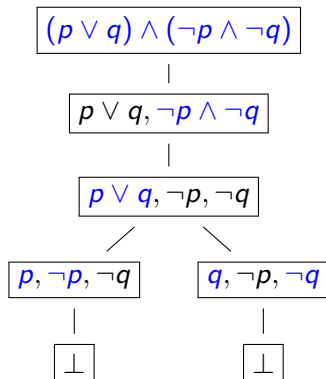
## No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Un tablero completo de  $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$  es



## No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- ▶ Otro tablero completo de  $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$  es



## Tema 3: Tableros semánticos

1. Búsqueda de modelos
2. Notación uniforme
3. Procedimiento de completación de tableros
4. Modelos por tableros semánticos
5. Consistencia mediante tableros
6. Teorema por tableros
7. Deducción por tableros

## Modelos por tableros

- ▶ Def.: Sea  $S$  un conjunto de fórmulas,  $\mathcal{T}$  un tablero de  $S$ .
  - ▶ Una hoja de  $\mathcal{T}$  es **cerrada** si contiene una fórmula y su negación o es de la forma  $\{\perp\}$ .
  - ▶ Una hoja de  $\mathcal{T}$  es **abierta** si es un conjunto de literales y no contiene un literal y su negación.
- ▶ Def.: Un **tablero completo** de  $S$  es un tablero de  $S$  tal que todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- ▶ Def.: Un tablero es **cerrado** si todas sus hojas son cerradas.
- ▶ Reducción de modelos:
  - ▶  $I \models F \wedge G$  syss  $I \models F$  e  $I \models G$ .
  - ▶  $I \models F \vee G$  syss  $I \models F$  ó  $I \models G$ .
- ▶ Propiedades:
  1. Si las hojas de un tablero del conjunto de fórmulas  $\{F_1, \dots, F_n\}$  son  $\{G_{1,1}, \dots, G_{1,n_1}\}, \dots, \{G_{m,1}, \dots, G_{m,n_m}\}$ , entonces  $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \equiv (G_{1,1} \wedge \dots \wedge G_{1,n_1}) \vee \dots \vee (G_{m,1} \wedge \dots \wedge G_{m,n_m})$ .
  2. Prop.: Sea  $S$  un conjunto de fórmulas,  $\mathcal{T}$  un tablero de  $S$  e  $I$  una interpretación. Entonces,  $I \models S$  syss existe una hoja  $S_1$  de  $\mathcal{T}$  tal que  $I \models S_1$ .



## Tema 3: Tableros semánticos

1. Búsqueda de modelos
2. Notación uniforme
3. Procedimiento de completación de tableros
4. Modelos por tableros semánticos
5. Consistencia mediante tableros
6. Teorema por tableros
7. Deducción por tableros

## Consistencia mediante tableros

- ▶ Prop.: Si  $\{p_1, \dots, p_n, \neg q_1, \dots, \neg q_m\}$  es una hoja abierta de un tablero del conjunto de fórmulas  $S$ , entonces la interpretación  $I$  tal que  $I(p_1) = 1, \dots, I(p_n) = 1, I(q_1) = 0, \dots, I(q_m) = 0$  es un modelo de  $S$ .
- ▶ Prop.: Un conjunto de fórmulas  $S$  es consistente syss  $S$  tiene un tablero con alguna hoja abierta.
- ▶ Prop.: Un conjunto de fórmulas  $S$  es inconsistente syss  $S$  tiene un tablero completo cerrado.

## Tema 3: Tableros semánticos

1. Búsqueda de modelos
2. Notación uniforme
3. Procedimiento de completación de tableros
4. Modelos por tableros semánticos
5. Consistencia mediante tableros
6. Teorema por tableros
7. Deducción por tableros

## Teorema por tableros

- ▶ Def.: Una fórmula  $F$  es un **teorema** (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si  $\{\neg F\}$  tiene un tablero completo cerrado.  
Se representa por  $\vdash_{Tab} F$ .
- ▶ Ejemplos:  $\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$   
 $\not\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$
- ▶ Teor.: El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,

$$\text{Adecuado: } \vdash_{Tab} F \Rightarrow \models F$$

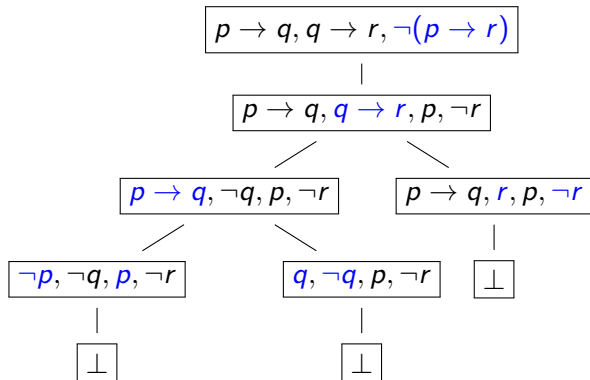
$$\text{Completo: } \models F \Rightarrow \vdash_{Tab} F$$

## Tema 3: Tableros semánticos

1. Búsqueda de modelos
2. Notación uniforme
3. Procedimiento de completación de tableros
4. Modelos por tableros semánticos
5. Consistencia mediante tableros
6. Teorema por tableros
7. Deducción por tableros

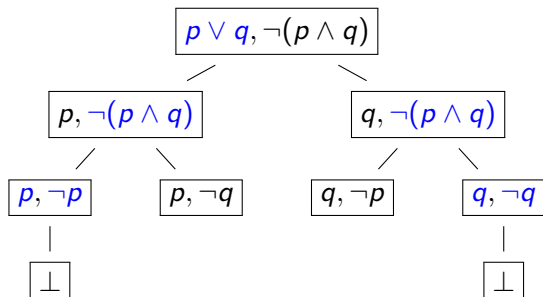
## Deducción por tableros

- ▶ Def.: La fórmula  $F$  es **deducible** (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas  $S$  si existe un tablero completo cerrado de  $S \cup \{\neg F\}$ . Se representa por  $S \vdash_{Tab} F$ .
- ▶ Ejemplo:  $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$



## Deducción por tableros

- ▶ Ejemplo:  $\{p \vee q\} \not\vdash_{Tab} p \wedge q$



- ▶ Contramodelos de  $\{p \vee q\} \not\vdash_{Tab} p \wedge q$ 
  - las interpretaciones  $I_1$  tales que  $I_1(p) = 1$  e  $I_1(q) = 0$
  - las interpretaciones  $I_2$  tales que  $I_2(p) = 0$  e  $I_2(q) = 1$
- ▶ Teor.:  $S \vdash_{Tab} F$  syss  $S \models F$ .

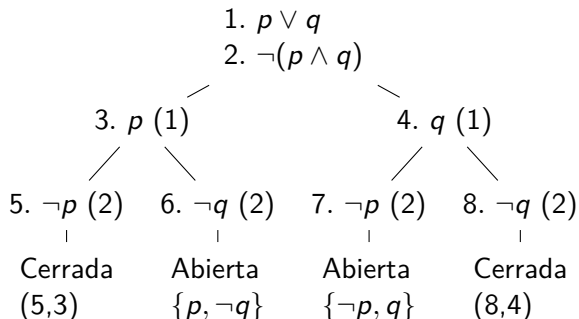
## Tema 3: Tableros semánticos

1. Búsqueda de modelos
2. Notación uniforme
3. Procedimiento de completación de tableros
4. Modelos por tableros semánticos
5. Consistencia mediante tableros
6. Teorema por tableros
7. Deducción por tableros



## Tableros en notación reducida

- Ejemplo:  $\{p \vee q\} \not\vdash_{Tab} p \wedge q$



## Bibliografía

1. Ben-Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)  
Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux
2. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)  
Cap. 3: Semantic tableaux and resolution
3. Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)  
Cap. 7.9: Tableaux semánticos para la lógica de proposiciones
4. Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)  
Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)  
Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas