

# Lógica matemática y fundamentos (2014–15)

## Tema 8: Deducción natural en lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez  
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 8: Deducción natural en lógica de primer orden

1. Sustituciones
2. Reglas de deducción natural de cuantificadores
3. Reglas de la igualdad

## Tema 8: Deducción natural en lógica de primer orden

### 1. Sustituciones

Definición de sustitución

Aplicación de sustituciones a términos

Aplicación de sustituciones a fórmulas

Sustituciones libres

### 2. Reglas de deducción natural de cuantificadores

### 3. Reglas de la igualdad

## Sustituciones

- ▶ Def.: Una **sustitución**  $\sigma$  (de  $L$ ) es una aplicación  $\sigma : \text{Var} \rightarrow \text{Térm}(L)$ .
- ▶ Notación:  $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$  representa la sustitución  $\sigma$  definida por

$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

- ▶ Ejemplo:  $[x/s(0), y/x + y]$  es la sustitución  $\sigma$  de  $\text{Var}$  en los términos de la aritmética definida por

$$\sigma(x) = s(0), \sigma(y) = x + y \text{ y } \sigma(z) = z \text{ para } z \in \text{Var} \setminus \{x, y\}$$

- ▶ Notación:  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$  representarán sustituciones.

## Aplicación de sustituciones a términos

- ▶ Def.:  $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$  es el término obtenido sustituyendo en  $t$  las apariciones de  $x_i$  por  $t_i$ .

- ▶ Def.: La extensión de  $\sigma$  a términos es la aplicación  $\sigma : \text{Térm}(L) \rightarrow \text{Térm}(L)$  definida por

$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- ▶ Ejemplo: Si  $\sigma = [x/f(y, a), y/z]$ , entonces

- ▶  $a\sigma = a$ , donde  $a$  es una constante.
- ▶  $w\sigma = w$ , donde  $w$  es una variable distinta de  $x$  e  $y$ .
- ▶  $h(a, x, w)\sigma = h(a\sigma, x\sigma, w\sigma) = h(a, f(y, a), w)$
- ▶  $f(x, y)\sigma = f(x\sigma, y\sigma) = f(f(y, a), z)$
- ▶  $h(a, f(x, y), w)\sigma = h(a\sigma, f(x, y)\sigma, w\sigma) = h(a, f(f(y, a), z), w)$

## Aplicación de sustituciones a fórmulas

- ▶ Def.:  $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$  es la fórmula obtenida sustituyendo en  $F$  las apariciones libres de  $x_i$  por  $t_i$ .
- ▶ Def.: La extensión de  $\sigma$  a fórmulas es la aplicación  $\sigma : \text{Fórm}(L) \rightarrow \text{Fórm}(L)$  definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1, \dots, t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall, \exists\} \end{cases}$$

donde  $\sigma_x$  es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y), & \text{si } y \text{ es distinta de } x. \end{cases}$$

## Ejemplos de aplicación de sustituciones a fórmulas

► Ejemplos: Si  $\sigma = [x/f(y), y/b]$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{► } (\forall x (Q(x) \rightarrow R(x, y)))\sigma &= \forall x ((Q(x) \rightarrow R(x, y))\sigma_x) \\ &= \forall x (Q(x)\sigma_x \rightarrow R(x, y)\sigma_x) \\ &= \forall x (Q(x) \rightarrow R(x, b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } (Q(x) \rightarrow \forall x R(x, y))\sigma &= Q(x)\sigma \rightarrow (\forall x R(x, y))\sigma \\ &= Q(f(y)) \rightarrow \forall x (R(x, y)\sigma_x) \\ &= Q(f(y)) \rightarrow \forall x R(x, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{► } (\forall x (Q(x) \rightarrow \forall y R(x, y)))\sigma &= \forall x ((Q(x) \rightarrow \forall y R(x, y))\sigma_x) \\ &= \forall x (Q(x)\sigma_x \rightarrow (\forall y R(x, y))\sigma_x) \\ &= \forall x (Q(x) \rightarrow \forall y (R(x, y)\sigma_{xy})) \\ &= \forall x (Q(x) \rightarrow \forall y R(x, y)) \end{aligned}$$

## Sustituciones libres

- ▶ Def.: Una **sustitución se denomina libre para una fórmula** cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.
- ▶ Ejemplos:
  - ▶  $[y/x]$  no es libre para  $\exists x (x < y)$   
 $\exists x (x < y)[y/x] = \exists x (x < x)$
  - ▶  $[y/g(y)]$  es libre para  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$   
 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(y)]$   
 $= \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(g(y))))$
  - ▶  $[y/g(x)]$  no es libre para  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$   
 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(x)]$   
 $= \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, f(g(x))))$
- ▶ Convenio: Al escribir  $F\sigma$  supondremos que  $\sigma$  es libre para  $F$ .

## Tema 8: Deducción natural en lógica de primer orden

### 1. Sustituciones

### 2. Reglas de deducción natural de cuantificadores

Reglas del cuantificador universal

Reglas del cuantificador existencial

Demostración de equivalencias por deducción natural

### 3. Reglas de la igualdad



## Regla de introducción del cuantificador universal

$$\frac{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ F[x/x_0] \end{array}}{\forall x F} \quad \forall i$$

donde  $x_0$  es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

► Nota: Analogía con  $\wedge i$ .

►  $\forall x [P(x) \rightarrow \neg Q(x)], \forall x P(x) \vdash \forall x \neg Q(x)$

1  $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$  premisa

2  $\forall x P(x)$  premisa

3 actual  $x_0$  supuesto

4  $P(x_0) \rightarrow \neg Q(x_0)$   $\forall e$  1, 3

5  $P(x_0)$   $\forall e$  2, 3

6  $\neg Q(x_0)$   $\rightarrow e$  4, 5

7  $\forall x \neg Q(x)$   $\forall i$  3 – 6

## Regla de introducción del cuantificador existencial

- ▶ Regla de **introducción del cuantificador existencial**:

$$\frac{F[x/t]}{\exists x F} \exists i$$

donde  $[x/t]$  es libre para  $F$ .

- ▶ Nota: Analogía con  $\forall i_1$  y  $\forall i_2$ .
- ▶ Ejemplo 3:  $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$ 
  - 1  $\forall x P(x)$  premisa
  - 2  $P(x_0)$   $\forall e$  1
  - 3  $\exists x P(x)$   $\exists i$  2

## Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\frac{\exists x F \quad \boxed{\begin{array}{l} x_0 \quad F[x/x_0] \\ \vdots \\ G \end{array}}}{G} \exists e$$

donde  $x_0$  es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

► Nota: Analogía con  $\forall e$ .

► Ejemplo:  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

1  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  premisa

2  $\exists x P(x)$  premisa

3 actual  $x_0, P(x_0)$  supuesto

4  $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$   $\forall e$  1, 3

5  $Q(x_0)$   $\rightarrow e$  4, 3

6  $\exists x Q(x)$   $\exists i$  5

7  $\exists x Q(x)$   $\exists e$  2, 3 – 6

## Equivalencias

- ▶ Sean  $F$  y  $G$  fórmulas.

$$[1(a)] \quad \neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$$

$$[1(b)] \quad \neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$$

- ▶ Sean  $F$  y  $G$  fórmulas y  $x$  una variable no libre en  $G$ .

$$[2(a)] \quad \forall x F \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$$

$$[2(b)] \quad \forall x F \vee G \equiv \forall x (F \vee G)$$

$$[2(c)] \quad \exists x F \wedge G \equiv \exists x (F \wedge G)$$

$$[2(d)] \quad \exists x F \vee G \equiv \exists x (F \vee G)$$

- ▶ Sean  $F$  y  $G$  fórmulas.

$$[3(a)] \quad \forall x F \wedge \forall x G \equiv \forall x (F \wedge G)$$

$$[3(b)] \quad \exists x F \vee \exists x G \equiv \exists x (F \vee G)$$

- ▶ Sean  $F$  y  $G$  fórmulas.

$$[4(a)] \quad \forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$$

$$[4(b)] \quad \exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$$

Equivalencia 1(a)  $\rightarrow$ 

$$\neg\forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$$

1  $\neg\forall x P(x)$  premisa

2	$\neg\exists x \neg P(x)$	supuesto
3	actual $x_0$	supuesto
4	$\neg P(x_0)$	supuesto
5	$\exists x \neg P(x)$	$\exists i$ 4, 3
6	$\perp$	$\neg e$ 2, 5
7	$P(x_0)$	RAA 4 – 6
8	$\forall x P(x)$	$\forall i$ 3 – 7
9	$\perp$	$\neg e$ 1, 8
10	$\exists x \neg P(x)$	RAA 2 – 9

## Equivalencia 1(a) ←

 $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$ 1  $\exists x \neg P(x)$  premisa2  $\neg \neg \forall x P(x)$  supuesto3 actual  $x_0, \neg P(x_0)$  supuesto4  $\forall x P(x)$   $\neg \neg e$  25  $P(x_0)$   $\forall e$  46  $\perp$   $\neg e$  3, 57  $\perp$   $\exists e$  1, 3 – 68  $\neg \forall x P(x)$  RAA 2 – 7

## Equivalencia 1(a) $\leftrightarrow$

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

1	$\neg \forall x P(x)$	supuesto
---	-----------------------	----------

2	$\exists x \neg P(x)$	Lema 1(a) $\rightarrow$
---	-----------------------	-------------------------

3	$\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$	$\rightarrow$ i 1 – 2
---	---	-----------------------

4	$\exists x \neg P(x)$	supuesto
---	-----------------------	----------

5	$\neg \forall x P(x)$	Lema 1(a) $\leftarrow$
---	-----------------------	------------------------

6	$\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$	$\rightarrow$ i 4 – 5
---	---	-----------------------

7	$\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$	$\leftrightarrow$ i 3, 6
---	---	--------------------------

Equivalencia 3(a)  $\rightarrow$ 

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

1  $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$  premisa

2 actual  $x_0$  supuesto

3  $P(x_0) \wedge Q(x_0)$   $\forall e$  1, 2

4  $P(x_0)$   $\wedge e_1$  3

5  $\forall x P(x)$   $\forall i$  2 – 4

6 actual  $x_1$  supuesto

7  $P(x_1) \wedge Q(x_1)$   $\forall e$  1, 6

8  $Q(x_1)$   $\wedge e_2$  7

9  $\forall x Q(x)$   $\forall i$  6 – 8

10  $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$   $\wedge i$  5, 9

## Equivalencia 3(a) ←

$$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \vdash \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

1  $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$  premisa

2 actual  $x_0$  supuesto

3  $\forall x P(x)$   $\wedge e_1$  1

4  $P(x_0)$   $\forall e$  3, 2

5  $\forall x Q(x)$   $\wedge e_2$  1

6  $Q(x_0)$   $\forall e$  5

7  $P(x_0) \wedge Q(x_0)$   $\wedge i$  4, 6

8  $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$   $\forall i$  2 – 7

## Equivalencia 3(a) $\leftrightarrow$

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

1	$\forall x (P(x) \wedge Q(x))$	supuesto
---	--------------------------------	----------

2	$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	Lema 3(a) $\rightarrow$
---	--	-------------------------

3	$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	$\rightarrow$ i 1 – 2
---	---	-----------------------

4	$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	supuesto
---	--	----------

5	$\forall x (P(x) \wedge Q(x))$	Lema 3(a) $\leftarrow$
---	--------------------------------	------------------------

6	$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$	$\rightarrow$ i 4 – 5
---	---	-----------------------

7	$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	$\leftrightarrow$ i 3, 6
---	---	--------------------------

Equivalencia 3(b)  $\rightarrow$ 

$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vdash \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

$$1 \quad \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

premisa

$$2 \quad \exists x P(x) \quad \text{supuesto}$$

$$3 \quad \text{actual } x_0, P(x_0) \quad \text{supuesto}$$

$$4 \quad P(x_0) \vee Q(x_0) \quad \forall i_1 3$$

$$5 \quad \exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \exists i 4, 3$$

$$6 \quad \exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \exists e 2, 3 - 5$$

$$7 \quad \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

$$\exists x Q(x) \quad \text{supuesto}$$

$$\text{actual } x_1, Q(x_1) \quad \text{supuesto}$$

$$P(x_1) \vee Q(x_1) \quad \forall i_2 3'$$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \exists i 3', 4'$$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \exists e 2', 3' - 5'$$

$$\forall 1e, 2 - 6, 2' - 6'$$

## Equivalencia 3(b) ←

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

1  $\exists x (P(x) \vee Q(x))$  premisa

2 actual  $x_0$ ,  $P(x_0) \vee Q(x_0)$  supuesto

3  $P(x_0)$  supuesto

4  $\exists x P(x)$   $\exists i$  3, 2

5  $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$   $\vee i_1$  4

6  $Q(x_0)$  supuesto

7  $\exists x Q(x)$   $\exists i$  6, 2

8  $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$   $\vee i_2$  7

9  $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$   $\vee e$  2, 3 – 5, 6 – 8

10  $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$   $\exists e$  1, 2 – 9

Equivalencia 3(b)  $\leftrightarrow$ 

$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

1	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	supuesto
2	$\exists x (P(x) \vee Q(x))$	Lema 3(b) $\rightarrow$

$$3 \quad \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \rightarrow i \ 1 - 2$$

4	$\exists x (P(x) \vee Q(x))$	supuesto
5	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	Lema 3(b) $\leftarrow$

$$6 \quad \exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \quad \rightarrow i \ 4 - 5$$

$$7 \quad \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x)) \quad \leftrightarrow i \ 3, 6$$

Equivalencia 4(b)  $\rightarrow$  $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$ 1  $\exists x \exists y P(x, y)$  premisa2 actual  $x_0, \exists y P(x_0, y)$  supuesto3 actual  $y_0, P(x_0, y_0)$  supuesto4  $\exists x P(x, y_0)$   $\exists i$  3,2, 2,15  $\exists y \exists x P(x, y)$   $\exists i$  4, 3,16  $\exists y \exists x P(x, y)$   $\exists e$  2,2, 3 – 57  $\exists y \exists x P(x, y)$   $\exists e$  1, 2 – 6

Equivalencia 4(b)  $\leftrightarrow$ 

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$$

1	$\exists x \exists y P(x, y)$	supuesto
---	-------------------------------	----------

2	$\exists y \exists x P(x, y)$	Lema 4(b) $\rightarrow$
---	-------------------------------	-------------------------

3	$\exists x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \exists x P(x, y)$	$\rightarrow$ i 1 – 2
---	---	-----------------------

4	$\exists y \exists x P(x, y)$	supuesto
---	-------------------------------	----------

5	$\exists x \exists y P(x, y)$	Lema 4(b) $\rightarrow$
---	-------------------------------	-------------------------

6	$\exists y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$	$\rightarrow$ i 4 – 5
---	---	-----------------------

7	$\exists x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$	$\leftrightarrow$ i 3, 6
---	---	--------------------------

## Tema 8: Deducción natural en lógica de primer orden

1. Sustituciones
2. Reglas de deducción natural de cuantificadores
3. Reglas de la igualdad
  - Regla de eliminación de la igualdad
  - Regla de introducción de la igualdad

## Regla de eliminación de la igualdad

- ▶ Regla de **eliminación de la igualdad**:

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} = e$$

donde  $[x/t_1]$  y  $[x/t_2]$  son libres para  $F$ .

- ▶ Ejemplo:

$$1 \quad (x + 1) = (1 + x) \quad \text{premisa}$$

$$2 \quad (x + 1 > 1) \rightarrow (x + 1 > 0) \quad \text{premisa}$$

$$3 \quad (1 + x > 1) \rightarrow (1 + x > 0) \quad =e 1, 2$$

- ▶ Ejemplo:  $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

$$1 \quad t_1 = t_2 \quad \text{premisa}$$

$$2 \quad t_2 = t_3 \quad \text{premisa}$$

$$3 \quad t_1 = t_3 \quad =e 2, 1$$

## Regla de introducción de la igualdad

- ▶ Regla de introducción de la igualdad:

$$\frac{}{t = t} = i$$

- ▶ Ejemplo:  $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

$$1 \quad t_1 = t_2 \quad \text{premisa}$$

$$2 \quad t_1 = t_1 \quad =i$$

$$3 \quad t_2 = t_1 \quad =e 1, 2$$

## Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000) pp. 259–287.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
3. J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review*. (2000) pp. 28–33.
4. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional*. (UNED, 2003) pp. 88–94.
5. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.