

# Lógica matemática y fundamentos (2015–16)

## Tema 10: Formas normales de Skolem y cláusulas

José A. Alonso Jiménez  
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 10: Formas normales de Skolem y cláusulas

1. Formas normales
2. Cláusulas de primer orden

## Tema 10: Formas normales de Skolem y cláusulas

### 1. Formas normales

Forma rectificada

Forma normal prenexa

Forma normal prenexa conjuntiva

Forma de Skolem

### 2. Cláusulas de primer orden

## Fórmula en forma rectificada

- ▶ Def.:  $F$  está en forma rectificada si ninguna variable aparece libre y ligada y cada cuantificador se refiere a una variable diferente.

- ▶ Ejemplos:

$\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(z, y)$  está en forma rectificada

$\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(x, y)$  no está en forma rectificada

$\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(z, x)$  no está en forma rectificada

- ▶ Prop.: Para toda fórmula  $F$  existe una fórmula equivalente  $G$  en forma rectificada.

- ▶ Lema del renombramiento: Si  $y$  no aparece libre en  $F$ , entonces

$$\forall x F \equiv \forall y F[x/y]$$

$$\exists x F \equiv \exists y F[x/y].$$

- ▶ Ejemplos de rectificación:

$$\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(z, x) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall u Q(z, u)$$

$$\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(x, y) \equiv \forall z P(z) \rightarrow \forall y Q(x, y)$$

## Fórmula en forma normal prenexa

- ▶ Def.: La fórmula  $F$  está en forma normal prenexa (FNP) si es de la forma  $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)G$ , donde  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ ,  $n \geq 0$  y  $G$  no tiene cuantificadores.  $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)$  se llama el **prefijo** de  $F$  y  $G$  se llama la **matriz** de  $F$ .
- ▶ Ejemplos:

Fórmula	¿FNP?
$\neg \exists x [P(x) \rightarrow \forall x P(x)]$	no
$\forall x \exists y [P(x) \wedge \neg P(y)]$	sí
$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$	no
$\forall x \exists y [P(x) \vee Q(y)]$	sí
$\exists y \forall x [P(x) \vee Q(y)]$	sí
$\neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \rightarrow R(x)])$	no
$\exists z \forall x \forall y [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge P(z)]$	sí

## Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa rectificada:

1. Rectificar la fórmula usando las equivalencias

$$\forall x F \equiv \forall y F[x/y] \quad (1)$$

$$\exists x F \equiv \exists y F[x/y] \quad (2)$$

donde  $y$  es una variable que no ocurre libre en  $F$ .

2. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \quad (3)$$

3. Eliminar los condicionales usando la equivalencia

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G \quad (4)$$

## Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

### 4. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \quad (5)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G \quad (6)$$

$$\neg\neg F \equiv F \quad (7)$$

$$\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F \quad (8)$$

$$\neg\exists x F \equiv \forall x \neg F \quad (9)$$

### 5. Exteriorizar los cuantificadores usando las equivalencias

$$\forall x F \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (11)$$

$$\forall x F \vee G \equiv \forall x (F \vee G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (12)$$

$$\exists x F \wedge G \equiv \exists x (F \wedge G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (13)$$

$$\exists x F \vee G \equiv \exists x (F \vee G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (14)$$

$$G \wedge \forall x F \equiv \forall x (G \wedge F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (15)$$

$$G \vee \forall x F \equiv \forall x (G \vee F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (16)$$

$$G \wedge \exists x F \equiv \exists x (G \wedge F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (17)$$

$$G \vee \exists x F \equiv \exists x (G \vee F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (18)$$

## Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo 1:
- $$\begin{aligned} & \neg \exists x [P(x) \rightarrow \forall x P(x)] \\ \equiv & \neg \exists x [P(x) \rightarrow \forall y P(y)] && [\text{por (1)}] \\ \equiv & \neg \exists x [\neg P(x) \vee \forall y P(y)] && [\text{por (4)}] \\ \equiv & \forall x [\neg(\neg P(x) \vee \forall y P(y))] && [\text{por (9)}] \\ \equiv & \forall x [\neg\neg P(x) \wedge \neg \forall y P(y)] && [\text{por (6)}] \\ \equiv & \forall x [P(x) \wedge \exists y \neg P(y)] && [\text{por (7 y 8)}] \\ \equiv & \forall x \exists y [P(x) \wedge \neg P(y)] && [\text{por (17)}] \end{aligned}$$
- Ejemplo 2:
- $$\begin{aligned} & \forall x P(x) \vee \exists y Q(y) \\ \equiv & \forall x [P(x) \vee \exists y Q(y)] && [\text{por (12)}] \\ \equiv & \forall x \exists y [P(x) \vee Q(y)] && [\text{por (18)}] \end{aligned}$$
- Ejemplo 3:
- $$\begin{aligned} & \forall x P(x) \vee \exists y Q(y) \\ \equiv & \exists y [\forall x P(x) \vee Q(y)] && [\text{por (18)}] \\ \equiv & \exists y \forall x [P(x) \vee Q(y)] && [\text{por (12)}] \end{aligned}$$



## Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

► Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\begin{aligned}
 & \neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \rightarrow R(x)]) \\
 \equiv & \neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall y [Q(y) \rightarrow R(y)] \rightarrow \forall z [P(z) \rightarrow R(z)]) && \text{[por (1)]} \\
 \equiv & \neg(\neg(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \vee \forall z [\neg P(z) \vee R(z)]) && \text{[por (4)]} \\
 \equiv & \neg\neg(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge \neg\forall z [\neg P(z) \vee R(z)] && \text{[por (6)]} \\
 \equiv & (\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge \exists z [\neg(\neg P(z) \vee R(z))] && \text{[por (7, 8)]} \\
 \equiv & (\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge \exists z [\neg\neg P(z) \wedge \neg R(z)] && \text{[por (6)]} \\
 \equiv & (\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge \exists z [P(z) \wedge \neg R(z)] && \text{[por (7)]} \\
 \equiv & \exists z [(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] && \text{[por (17)]} \\
 \equiv & \exists z [\forall x [(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]] \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] && \text{[por (11)]} \\
 \equiv & \exists z \forall x [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] && \text{[por (11)]} \\
 \equiv & \exists z \forall x [\forall y [(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))] \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] && \text{[por (15)]} \\
 \equiv & \exists z \forall x \forall y [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] && \text{[por (11)]}
 \end{aligned}$$

## Fórmula en forma normal prenexa conjuntiva

- ▶ Def.: La fórmula  $F$  está en forma normal prenexa conjuntiva (FNPC) si es de la forma  $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)G$ , donde  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ ,  $n \geq 0$ ,  $G$  no tiene cuantificadores y  $G$  está en forma normal conjuntiva.
- ▶ Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa conjuntiva:
  - ▶ Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa conjuntiva rectificada:

1. Calcular una forma normal prenexa rectificada usando las equivalencias (1)–(18)

2. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (19)$$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad (20)$$

- ▶ Ejemplo de cálculo de una FNPC de

$$\forall x \exists y [P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))]:$$

$$\forall x \exists y [P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))]$$

$$\equiv \forall x \exists y [(P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(x) \vee \neg R(y))] \quad [\text{por (19)}]$$

## Fórmula en forma de Skolem

### ► Forma de Skolem:

- Def.: La fórmula  $F$  está en forma de Skolem (FS) si es de la forma  $\forall x_1 \dots \forall x_n G$ , donde  $n \geq 0$  y  $G$  no tiene cuantificadores.
- Ejemplos:
 

$\forall x \exists y P(x, y)$	no está en forma de Skolem
$\forall x P(x, f(x))$	sí está en forma de Skolem
$\exists x Q(x)$	no está en forma de Skolem
$Q(a)$	sí está en forma de Skolem

### ► Equisatisfacibilidad:

- Def.: Las fórmulas  $F$  y  $G$  son **equisatisfacibles** si:  
 $F$  es satisfacible  $\Leftrightarrow G$  es satisfacible.

Se representa por  $F \approx G$

- Ejemplos:
 

$\exists x Q(x)$	$\approx$	$Q(a)$
$\exists x Q(x)$	$\not\approx$	$Q(a)$
$\forall x \exists y P(x, y)$	$\approx$	$\forall x P(x, f(x))$
$\forall x \exists y P(x, y)$	$\not\approx$	$\forall x P(x, f(x))$

## Algoritmo de cálculo de forma de Skolem

► Propiedades:

- Si  $a$  es una constante que no ocurre en  $F$ , entonces  $\exists x F \approx F[x/a]$ .
- Si  $g$  es un símbolo de función  $n$ -aria que no ocurre en  $F$ , entonces  $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists x F \approx \forall x_1 \dots \forall x_n F[x/g(x_1, \dots, x_n)]$ .

► Algoritmo de cálculo de forma de Skolem:

- Sea  $F$  una fórmula en forma normal prenexa rectificadas, la forma de Skolem de  $F$  es

$Sko(F) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} Sko(G[x/a]), & \text{si } F \text{ es } \exists x G \text{ y} \\ & a \text{ es una nueva constante;} \\ Sko(\forall x_1 \dots \forall x_n G[x/f(x_1, \dots, x_n)]), & \text{si } F \text{ es } \forall x_1 \dots \forall x_n \exists x G \text{ y} \\ & f \text{ es un nuevo símbolo de función;} \\ F, & \text{si } F \text{ está en forma de Skolem} \end{array} \right.$$

- Propiedad: Si  $F$  es una fórmula en forma normal prenexa rectificadas, entonces  $Sko(F)$  está en forma de Skolem y  $Sko(F) \approx F$ .

## Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

► Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}
 & \text{Sko}(\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w P(x, y, z, u, v, w)) \\
 &= \text{Sko}(\forall y \forall z \exists u \forall v \exists w P(a, y, z, u, v, w)) \\
 &= \text{Sko}(\forall y \forall z \forall v \exists w P(a, y, z, f(y, z), v, w)) \\
 &= \text{Sko}(\forall y \forall z \forall v P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))) \\
 &= \forall y \forall z \forall v P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))
 \end{aligned}$$

► Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}
 & \text{Sko}(\forall x \exists y \forall z \exists w [\neg P(a, w) \vee Q(f(x), y)]) \\
 &= \text{Sko}(\forall x \forall z \exists w [\neg P(a, w) \vee Q(f(x), h(x))]) \\
 &= \text{Sko}(\forall x \forall z [\neg P(a, g(x, z)) \vee Q(f(x), h(x))]) \\
 &= \forall x \forall z [\neg P(a, g(x, z)) \vee Q(f(x), h(x))]
 \end{aligned}$$

## Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- ▶ Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\neg \exists x [P(x) \rightarrow \forall x P(x)]$$

$$\equiv \forall x \exists y [P(x) \wedge \neg P(y)] \quad [\text{por página 8}]$$

$$\approx \forall x [P(x) \wedge \neg P(f(x))]$$

- ▶ Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$$

$$\equiv \forall x \exists y [P(x) \vee Q(y)] \quad [\text{por página 8}]$$

$$\approx \forall x [P(x) \vee Q(f(x))]$$

- ▶ Ejemplo de cálculo de otra forma de Skolem de

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$$

$$\equiv \exists y \forall x [P(x) \vee Q(y)] \quad [\text{por página 8}]$$

$$\approx \forall x [P(x) \vee Q(a)]$$

- ▶ Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \rightarrow R(x)])$$

$$\equiv \exists z \forall x \forall y [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] \quad [\text{p. 9}]$$

$$\approx \forall x \forall y [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))]$$

## Tema 10: Formas normales de Skolem y cláusulas

### 1. Formas normales

### 2. Cláusulas de primer orden

Sintaxis de la lógica clausal de primer orden

Semántica de la lógica clausal de primer orden

Forma clausal de una fórmula

Forma clausal de un conjunto de fórmulas

Reducción de consecuencia e inconsistencia de cláusulas

## Sintaxis de la lógica clausal de primer orden

- ▶ Un **átomo** es una fórmula atómica.  
Variables sobre átomos:  $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$
- ▶ Un **literal** es un átomo ( $A$ ) o la negación de un átomo ( $\neg A$ ).  
Variables sobre literales:  $L, L_1, L_2, \dots$
- ▶ Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.  
Variables sobre cláusulas:  $C, C_1, C_2, \dots$
- ▶ La **cláusula vacía** es el conjunto vacío de literales.  
La cláusula vacía se representa por  $\square$ .
- ▶ Conjuntos finitos de cláusulas.  
Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas:  $S, S_1, S_2, \dots$



## Semántica de la lógica clausal de primer orden

### ► Fórmulas correspondientes:

- Def.: La **fórmula correspondiente a la cláusula**  $\{L_1, \dots, L_n\}$  es

$$\forall x_1 \dots \forall x_p [L_1 \vee \dots \vee L_n],$$

donde  $x_1, \dots, x_p$  son las variables libres de  $L_1 \vee \dots \vee L_n$ .

- Def.: La **fórmula correspondiente a la cláusula**  $\square$  es  $\perp$ .

- Def.: La **fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas**

$$\{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\},$$

cuyas variables libres son  $x_1, \dots, x_p$ , es

$$\forall x_1 \dots \forall x_p [(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)].$$

- Def.: La **fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas**  $\emptyset$  es  $\top$ .

### ► Semántica:

- Def.: En cualquier interpretación  $\mathcal{I} = (U, I)$ ,  $I(\top) = 1$  e  $I(\perp) = 0$ .
- Def.: Los **conceptos semánticos** relativos a las cláusulas y a los conjuntos de cláusulas son los de sus correspondientes fórmulas.

## Forma clausal de una fórmula

- ▶ Def.: Una **forma clausal de una fórmula**  $F$  es un conjunto de cláusulas  $S$  tal que  $F \approx S$ .
- ▶ Algoritmo: Aplicando a la fórmula  $F$  los siguientes pasos se obtiene  $S$  que es una forma clausal de  $F$ :
  1. Sea  $F_1 = \exists y_1 \dots \exists y_n F$ , donde  $y_1, \dots, y_n$  son las variables libres de  $F$ .
  2. Sea  $F_2$  una forma normal prenexa conjuntiva rectificada de  $F_1$  calculada mediante el algoritmo de la página 10.
  3. Sea  $F_3 = \text{Sko}(F_2)$ , que tiene la forma
 
$$\forall x_1 \dots \forall x_p [(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)],$$
  4. Sea  $S = \{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$ .
- ▶ Prop.:  $F \approx F_1 \equiv F_2 \approx F_3 \equiv S$ .

## Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

- ▶ Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\neg \exists x [P(x) \rightarrow \forall x P(x)]$$

$$\approx \forall x [P(x) \wedge \neg P(f(x))] \quad [\text{pág. 14}]$$

$$\equiv \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$$

- ▶ Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$$

$$\approx \forall x [P(x) \vee Q(f(x))] \quad [\text{pág. 14}]$$

$$\equiv \{\{P(x), Q(f(x))\}\}$$

- ▶ Ejemplo de cálculo de otra forma clausal de

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$$

$$\approx \forall x [P(x) \vee Q(a)] \quad [\text{pág. 14}]$$

$$\equiv \{\{P(x), Q(a)\}\}$$

- ▶ Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\neg (\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \rightarrow R(x)])$$

$$\approx \forall x \forall y [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))] \quad [\text{p 14}]$$

$$\equiv \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$$

## Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

$$\begin{aligned}
& \neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \\
\equiv & \neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \exists y P(y) \rightarrow \exists z Q(z)) && [(2)] \\
\equiv & \neg(\neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \exists y P(y)) \vee \exists z Q(z)) && [(4)] \\
\equiv & \neg(\neg(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists y P(y)) \vee \exists z Q(z)) && [(4)] \\
\equiv & \neg\neg(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists y P(y)) \wedge \neg\exists z Q(z) && [(6)] \\
\equiv & (\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists y P(y)) \wedge \neg\exists z Q(z) && [(7)] \\
\equiv & (\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists y P(y)) \wedge \forall z \neg Q(z) && [(9)] \\
\equiv & \exists y [\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge P(y)] \wedge \forall z \neg Q(z) && [(17)] \\
\equiv & \exists y [(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge P(y)) \wedge \forall z \neg Q(z)] && [(13)] \\
\equiv & \exists y [\forall x [(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y)]] \wedge \forall z \neg Q(z) && [(11)] \\
\equiv & \exists y \forall x [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y)) \wedge \forall z \neg Q(z)] && [(11)] \\
\equiv & \exists y \forall x \forall z [(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(z)] && [(15)] \\
\approx & \forall x \forall z [(\neg P(x) \vee Q(x) \wedge P(a)) \wedge \neg Q(z)] && [(15)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}
\end{aligned}$$

## Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- ▶ Equisatisficibilidad de conjuntos de fórmulas:
  - ▶ Def.: Los conjuntos de fórmulas  $S_1$  y  $S_2$  son equisatisficibles si:
    - $S_1$  es satisficible syss  $S_2$  es satisficible.
    - Se representa por  $S_1 \approx S_2$ .
- ▶ Forma clausal de un conjunto de fórmulas:
  - ▶ Def.: Una **forma clausal de un conjunto de fórmulas**  $S$  es un conjunto de cláusulas equisatisficible con  $S$ .
  - ▶ Prop.: Si  $S_1, \dots, S_n$  son formas clausales de  $F_1, \dots, F_n$ , entonces  $S_1 \cup \dots \cup S_n$  es una forma clausal de  $\{F_1, \dots, F_n\}$ .
  - ▶ Ejemplo: Una forma clausal de
 
$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x), \neg \exists x Q(x)\}$$
 es
 
$$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}.$$

## Reducción de consecuencia e inconsistencia de cláusulas

- Prop: Sean  $S_1, \dots, S_n$  formas clausales de las fórmulas  $F_1, \dots, F_n$  y  $S$  una forma clausal de  $\neg G$ . Son equivalentes:

1.  $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$ .
2.  $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$  es inconsistente.
3.  $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$  es inconsistente.

- Ejemplos:

- Ejemplo 1:

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x)\} \models \exists x Q(x)$$

sys  $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$  es inconsistente.

- Ejemplo 2:

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models \forall x [P(x) \rightarrow R(x)]$$

sys  $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$  es inconsistente.

## Bibliografía

1. M.L. Bonet *Apuntes de LPO*. (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 26–31.
2. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 35–39 y 46–51.
3. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional*. (UNED, 2003) pp. 101–106.
4. S. Hölldobler *Computational logic*. (U. de Dresden, 2004) pp. 62–67.
5. R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden*. (U. Politénica de Cataluña, 2003) pp. 16–17
6. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 37–49
7. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 43–47.
8. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 51–61.