

Lógica matemática y fundamentos (2015–16)

Tema 12: Resolución en lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 12: Resolución en lógica de primer orden

1. Introducción
2. Unificación
3. Resolución de primer orden

Tema 12: Resolución en lógica de primer orden

1. Introducción

Ejemplos de consecuencia mediante resolución

2. Unificación

3. Resolución de primer orden

Ejemplos de consecuencia mediante resolución

► Ejemplo 1:

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x)\} \models \exists x Q(x)$$

se reduce a

$$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\} \text{ es inconsistente.}$$

Demostración:

- | | | |
|---|-----------------------|--|
| 1 | $\{\neg P(x), Q(x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{P(a)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{\neg Q(z)\}$ | Hipótesis |
| 4 | $\{Q(a)\}$ | Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a]$ |
| 5 | □ | Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = [z/a]$ |

Ejemplos de consecuencia mediante resolución

► Ejemplo 2:

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models \forall x [P(x) \rightarrow R(x)]$$

se reduce a

$$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$$

es inconsistente.

Demostración:

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg Q(y), R(y)\}$	Hipótesis
3	$\{P(a)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg R(a)\}$	Hipótesis
5	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 3 con $\sigma = [x/a]$
6	$\{R(a)\}$	Resolvente de 2 y 5 con $\sigma = [y/a]$
5	□	Resolvente de 4 y 6 con $\sigma = \epsilon$

Tema 12: Resolución en lógica de primer orden

1. Introducción

2. Unificación

Unificadores

Composición de sustituciones

Comparación de sustituciones

Unificador de máxima generalidad

Algoritmo de unificación

3. Resolución de primer orden

Unificadores

- ▶ Def.: La sustitución σ es un **unificador** de los términos t_1 y t_2 si $t_1\sigma = t_2\sigma$.
- ▶ Def.: Los términos t_1 y t_2 son **unificables** si tienen algún unificador.
- ▶ Def.: t es una **instancia común** de t_1 y t_2 si existe una sustitución σ tal que $t = t_1\sigma = t_2\sigma$.
- ▶ Ejemplos:

t_1	t_2	Unificador	Instancia común
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(z), y/z]$	$f(g(z), g(z))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(y), z/y]$	$f(g(y), g(y))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(a), y/a]$	$f(g(a), g(a))$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[x/a, y/a]$	$f(a, a)$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[y/x]$	$f(x, x)$
$f(x, y)$	$g(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x, x)$	$f(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x)$	$f(g(x))$	No tiene	No tiene

- ▶ Nota: Las anteriores definiciones se extienden a conjuntos de términos y de literales.

Composición de sustituciones e identidad

► Composición de sustituciones:

- Def.: La **composición** de las sustituciones σ_1 y σ_2 es la sustitución $\sigma_1\sigma_2$ definida por $x(\sigma_1\sigma_2) = (x\sigma_1)\sigma_2$, para toda variable x .
- Ejemplo: Si $\sigma_1 = [x/f(z, a), y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b, z/g(w)]$, entonces
 - $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z, a)\sigma_2 = f(z\sigma_2, a\sigma_2) = f(g(w), a)$
 - $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$
 - $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$
 - $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

Por tanto, $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w), a), y/w, z/g(w)]$.

- Def.: La **substitución identidad** es la sustitución ϵ tal que, para todo x , $x\epsilon = x$.
- Propiedades:
 1. Asociativa: $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$
 2. Neutro: $\sigma\epsilon = \epsilon\sigma = \sigma$.

Comparación de sustituciones

- ▶ Def.: La sustitución σ_1 es **más general que** la σ_2 si existe una sustitución σ_3 tal que $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_3$. Se representa por $\sigma_2 \leq \sigma_1$.
- ▶ Def.: Las sustituciones σ_1 y σ_2 son **equivalentes** si $\sigma_1 \leq \sigma_2$ y $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Se representa por $\sigma_1 \equiv \sigma_2$.
- ▶ Ejemplos: Sean $\sigma_1 = [x/g(z), y/z]$, $\sigma_2 = [x/g(y), z/y]$ y $\sigma_3 = [x/g(a), y/a]$. Entonces,
 1. $\sigma_1 = \sigma_2[y/z]$
 2. $\sigma_2 = \sigma_1[z/y]$
 3. $\sigma_3 = \sigma_1[z/a]$
 4. $\sigma_1 \equiv \sigma_2$
 5. $\sigma_3 \leq \sigma_1$
- ▶ Ejemplo: $[x/a, y/a] \leq [y/x]$, ya que $[x/a, y/a] = [y/x][x/a, y/a]$.

Unificador de máxima generalidad

- ▶ Def.: La sustitución σ es un **unificador de máxima generalidad (UMG)** de los términos t_1 y t_2 si
 - σ es un unificador de t_1 y t_2 .
 - σ es más general que cualquier unificador de t_1 y t_2 .
- ▶ Ejemplos:
 1. $[x/g(z), y/z]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
 2. $[x/g(y), z/y]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
 3. $[x/g(a), y/a]$ no es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
- ▶ Nota: Las anterior definición se extienden a conjuntos de términos y de literales.

Unificación de listas de términos

- ▶ Notación de lista:
 - ▶ (a_1, \dots, a_n) representa una lista cuyos elementos son a_1, \dots, a_n .
 - ▶ $(a|R)$ representa una lista cuyo primer elemento es a y resto es R .
 - ▶ $()$ representa la lista vacía.
- ▶ Unificadores de listas de términos:
 - ▶ Def.: σ es un **unificador** de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si $s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma$.
 - ▶ Def.: $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ son **unificables** si tienen algún unificador.
 - ▶ Def.: σ es un **unificador de máxima generalidad (UMG)** de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si σ es un unificador de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ más general que cualquier otro.
- ▶ Aplicación de una sustitución a una lista de ecuaciones:
 - ▶ $(s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)\sigma = (s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma)$.

Algoritmo de unificación de listas de términos

- ▶ Entrada: Lista de ecuaciones $L = (s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)$ y sustitución σ .
- ▶ Salida:
Un UMG de las listas $(s_1 \dots, s_n)\sigma$ y $(t_1 \dots, t_n)\sigma$, si son unificables;
“No unificables”, en caso contrario.

Algoritmo de unificación de listas de términos

► Procedimiento $\text{unif}(L, \sigma)$:

1. Si $L = ()$, entonces $\text{unif}(L, \sigma) = \sigma$.
2. Si $L = (t = t|L')$, entonces $\text{unif}(L, \sigma) = \text{unif}(L', \sigma)$.
3. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_m)|L')$, entonces $\text{unif}(L, \sigma) = \text{unif}((t_1 = t'_1, \dots, t_m = t'_m|L'), \sigma)$.
4. Si $L = (x = t|L')$ (ó $L = (t = x|L')$) y x no aparece en t , entonces $\text{unif}(L, \sigma) = \text{unif}(L'[x/t], \sigma[x/t])$.
5. Si $L = (x = t|L')$ (ó $L = (t = x|L')$) y x aparece en t , entonces $\text{unif}(L, \sigma) = \text{"No unificables"}$.
6. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = g(t'_1 \dots, t'_m)|L')$, entonces $\text{unif}(L, \sigma) = \text{"No unificables"}$.
7. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_p)|L')$ y $m \neq p$, entonces $\text{unif}(L, \sigma) = \text{"No unificables"}$.

Algoritmo de unificación de dos términos

- ▶ Entrada: Dos términos t_1 y t_2 .
- ▶ Salida: Un UMG de t_1 y t_2 , si son unificables;
“No unificables”, en caso contrario.
- ▶ Procedimiento: $\text{unif}((t_1 = t_2), \epsilon)$.
- ▶ Ejemplo 1: Unificar $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$:
 - $\text{unif}((f(x, g(z)) = f(g(y), x)), \epsilon)$
 - $= \text{unif}((x = g(y), g(z) = x), \epsilon)$ por 3
 - $= \text{unif}((g(z) = x)[x/g(y)], \epsilon[x/g(y)])$ por 4
 - $= \text{unif}((g(z) = g(y)), [x/g(y)])$
 - $= \text{unif}((z = y), [x/g(y)])$ por 3
 - $= \text{unif}(), [x/g(y)][z/y]$ por 4
 - $= \text{unif}(), [x/g(y), z/y]$
 - $= [x/g(y), z/y]$ por 1

Ejemplos de unificación

- Ejemplo 2: Unificar $f(x, b)$ y $f(a, y)$:

$$\begin{aligned} & \text{unif}((f(x, b) = f(a, y)), \epsilon) \\ &= \text{unif}((x = a, b = y), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((b = y)[x/a], \epsilon[x/a]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((b = y), [x/a]) \\ &= \text{unif}(), [x/a][y/b] && \text{por 4} \\ &= [x/a, y/b] && \text{por 1} \end{aligned}$$

- Ejemplo 3: Unificar $f(x, x)$ y $f(a, b)$:

$$\begin{aligned} & \text{unif}((f(x, x) = f(a, b)), \epsilon) \\ &= \text{unif}((x = a, x = b), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((x = b)[x/a], \epsilon[x/a]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((a = b), [x/a]) \\ &= \text{"No unificable"} && \text{por 6} \end{aligned}$$

Ejemplos de unificación

- Ejemplo 4: Unificar $f(x, g(y))$ y $f(y, x)$:

$$\begin{aligned} & \text{unif}((f(x, g(y)) = f(y, x)), \epsilon) \\ &= \text{unif}((x = y, g(y) = x), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((g(y) = x)[x/y], \epsilon[x/y]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((g(y) = y), [x/y]) \\ &= \text{"No unificable"} && \text{por 5} \end{aligned}$$

- Ejemplo 5: Unificar $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, z)$

$$\begin{aligned} & \text{unif}((j(w, a, h(w)) = j(f(x, y), x, z))\epsilon) \\ &= \text{unif}((w = f(x, y), a = x, h(w) = z), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((a = x, h(w) = z)[w/f(x, y)], \epsilon[w/f(x, y)]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((a = x, h(f(x, y)) = z), [w/f(x, y)]) \\ &= \text{unif}((h(f(x, y)) = z)[x/a], [w/f(x, y)][x/a]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((h(f(a, y)) = z), [w/f(a, y), x/a]) \\ &= \text{unif}((, [w/f(a, y), x/a][z/h(f(a, y))]) && \text{por 4} \\ &= [w/f(a, y), x/a, z/h(f(a, y))] && \text{por 1} \end{aligned}$$

Ejemplos de unificación

- ▶ Ejemplo 6: Unificar $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, y)$
 - $\text{unif}((j(w, a, h(w)) = j(f(x, y), x, y)), \epsilon)$
 - $= \text{unif}((w = f(x, y), a = x, h(w) = y), \epsilon)$ por 3
 - $= \text{unif}((a = x, h(w) = y)[w/f(x, y)], \epsilon[w/f(x, y)])$ por 4
 - $= \text{unif}((a = x, h(f(x, y)) = y), [w/f(x, y)])$
 - $= \text{unif}((h(f(x, y)) = y)[x/a], [w/f(x, y)][x/a])$ por 4
 - $= \text{unif}((h(f(a, y)) = y), [w/f(a, y), x/a])$
 - $= \text{"No unificable"}$ por 5

- ▶ Ejemplo 7: Unificar $f(a, y)$ y $f(a, b)$:
 - $\text{unif}((f(a, y) = f(a, b)), \epsilon)$
 - $= \text{unif}((a = a, y = b), \epsilon)$ por 3
 - $= \text{unif}((y = b), \epsilon)$ por 2
 - $= \text{unif}((), [y/b])$ por 4
 - $= [y/b]$ por 1

Tema 12: Resolución en lógica de primer orden

1. Introducción

2. Unificación

3. Resolución de primer orden

Separación de variables

Resolvente binaria

Factorización

Demostraciones por resolución

Adecuación y completitud de la resolución

Decisión de no-consecuencia por resolución

Separación de variables

- ▶ Def.: La sustitución $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es un **renombramiento** si todos los t_i son variables.
- ▶ Prop.: Si θ es un renombramiento, entonces $C \equiv C\theta$.
- ▶ Def.: Las cláusulas C_1 y C_2 **están separadas** si no tienen ninguna variable común.
- ▶ Def.: Una **separación de las variables de C_1 y C_2** es un par de renombramientos (θ_1, θ_2) tales que $C_1\theta_1$ y $C_2\theta_2$ están separadas.
- ▶ Ejemplo: Una separación de variables de

$$C_1 = \{P(x), Q(x, y)\} \text{ y } C_2 = \{R(f(x, y))\}$$

es

$$(\theta_1 = [x/x_1, y/y_1], \theta_2 = [x/x_2, y/y_2]).$$

Resolvente binaria

- ▶ Def.: La cláusula C es una resolvente binaria de las cláusulas C_1 y C_2 si existen una separación de variables (θ_1, θ_2) de C_1 y C_2 , un literal $L_1 \in C_1$, un literal $L_2 \in C_2$ y un UMG σ de $L_1\theta_1$ y $L_2^c\theta_2$ tales que

$$C = (C_1\theta_1\sigma \setminus \{L_1\theta_1\sigma_1\}) \cup (C_2\theta_2\sigma \setminus \{L_2\theta_2\sigma\}).$$

- ▶ Ejemplo: Sean

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\neg P(x), Q(f(x))\}, & C_2 &= \{\neg Q(x), R(g(x))\}, \\ L_1 &= Q(f(x)), & L_2 &= \neg Q(x), \\ \theta_1 &= [x/x_1], & \theta_2 &= [x/x_2], \\ L_1\theta_1 &= Q(f(x_1)), & L_2^c\theta_2 &= Q(x_2), \\ \sigma &= [x_2/f(x_1)] \end{aligned}$$

Entonces, $C = \{\neg P(x_1), R(g(f(x_1)))\}$ es una resolvente binaria de C_1 y C_2 .

Factorización

- ▶ Def.: La cláusula C es un factor de la cláusula D si existen dos literales L_1 y L_2 en D que son unificables y $C = D\sigma \setminus \{L_2\sigma\}$ donde σ es un UMG de L_1 y L_2 .

- ▶ Ejemplo: Sean

$$D = \{P(x, y), P(y, x), Q(a)\}$$

$$L_1 = P(x, y)$$

$$L_2 = P(y, x)$$

$$\sigma = [y/x]$$

Entonces,

$$C = \{P(x, x), Q(a)\} \text{ es un factor de } D.$$

Ejemplos de refutación por resolución

► Refutación de

$$S = \{ \{ \neg P(x, f(x, y)) \}, \{ P(a, z), \neg Q(z, v) \}, \{ Q(u, a) \} \}$$

- | | | |
|---|-------------------------------|--|
| 1 | $\{ \neg P(x, f(x, y)) \}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{ P(a, z), \neg Q(z, v) \}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{ Q(u, a) \}$ | Hipótesis |
| 4 | $\{ \neg Q(f(a, y), v) \}$ | Resolvente de 1 y 2
con $\sigma = [x/a, z/f(a, y)]$ |
| 5 | □ | Resolvente de 3 y 4
con $\sigma = [u/f(a, y), v/a]$ |

► Refutación de $S = \{ \{ P(x) \}, \{ \neg P(f(x)) \} \}$

- | | | |
|---|----------------------|---|
| 1 | $\{ P(x) \}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{ \neg P(f(x)) \}$ | Hipótesis |
| 3 | □ | Resolvente de 1 y 2 con
con $\theta_1 = \epsilon, \theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$ |

Ejemplos de refutación por resolución

- ▶ Refutación de $S = \{\{P(x, y), P(y, x)\}, \{\neg P(u, v), \neg P(v, u)\}\}$
 - 1 $\{P(x, y), P(y, x)\}$ Hipótesis
 - 2 $\{\neg P(u, v), \neg P(v, u)\}$ Hipótesis
 - 3 $\{P(x, x)\}$ Factor de 1 con $[y/x]$
 - 4 $\{\neg P(u, u)\}$ Factor de 2 con $[v/u]$
 - 5 \square Resolvente de 3 y 4 con $[x/u]$

Demostraciones de cláusulas por resolución

- ▶ Sea S un conjunto de cláusulas.
- ▶ La sucesión (C_1, \dots, C_n) es una demostración por resolución de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
 - $C_i \in S$;
 - existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
 - existe $j < i$ tal que C_i es un factor de C_j
- ▶ La cláusula C es demostrable por resolución a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S .
- ▶ Una refutación por resolución de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S .
- ▶ Se dice que S es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de S .

Demostraciones de fórmulas por resolución

- ▶ Def.: Sean S_1, \dots, S_n formas clausales de las fórmulas F_1, \dots, F_n y S una forma clausal de $\neg F$. Una **demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$** es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.
- ▶ Def.: La fórmula F es **demostrable por resolución a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$** si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.

- ▶ Ejemplo: (tema 8 p. 21)

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x)\} \vdash_{Res} \exists x Q(x)$$

- | | | |
|---|-----------------------|---------------------------------|
| 1 | $\{\neg P(x), Q(x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{P(a)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{\neg Q(z)\}$ | Hipótesis |
| 4 | $\{Q(a)\}$ | Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$ |
| 5 | \square | Resolvente de 3 y 4 con $[z/a]$ |

Ejemplos de demostraciones por resolución

- ▶ Ejemplo: (tema 8 p. 21)

$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)] \vdash_{Res} \forall x [P(x) \rightarrow R(x)]\}$$

1 $\{\neg P(x), Q(x)\}$ Hipótesis

2 $\{\neg Q(y), R(y)\}$ Hipótesis

3 $\{P(a)\}$ Hipótesis

4 $\{\neg R(a)\}$ Hipótesis

5 $\{Q(a)\}$ Resolvente de 1 y 3 con $[x/a]$

6 $\{R(a)\}$ Resolvente de 5 y 2 con $[y/a]$

5 \square Resolvente de 6 y 4

- ▶ Ejemplo: (tema 6 p. 55) $\vdash_{Res} \exists x [P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$

1 $\{P(x)\}$ Hipótesis

2 $\{\neg P(f(x))\}$ Hipótesis

3 \square Resolvente de 1 y 2 con $\theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x)']$

Ejemplos de demostraciones por resolución

► Ejemplo: $\vdash_{Res} \forall x \exists y \neg(P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y))$

– Forma clausal:

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \exists y \neg(P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y)) \\ \equiv & \neg \forall x \exists y \neg((P(y, x) \rightarrow \neg P(y, y)) \wedge (\neg P(y, y) \rightarrow P(y, x))) \\ \equiv & \neg \forall x \exists y \neg((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (\neg \neg P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \equiv & \neg \forall x \exists y \neg((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \equiv & \exists x \forall y \neg \neg((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \equiv & \exists x \forall y ((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \approx & \forall y ((\neg P(y, a) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, a))) \\ \equiv & \{\{\neg P(y, a), \neg P(y, y)\}, \{P(y, y), P(y, a)\}\} \end{aligned}$$

– Refutación:

- | | | |
|---|----------------------------------|-------------------------|
| 1 | $\{\neg P(y, a), \neg P(y, y)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{P(y, y), P(y, a)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{\neg P(a, a)\}$ | Factor de 1 con $[y/a]$ |
| 4 | $\{P(a, a)\}$ | Factor de 2 con $[y/a]$ |
| 5 | \square | Resolvente de 3 y 4 |

Paradoja del barbero de Russell

En una isla pequeña hay sólo un barbero. El gobernador de la isla ha publicado la siguiente norma: *“El barbero afeita a todas las personas que no se afeitan a sí misma y sólo a dichas personas”*. Demostrar que la norma es inconsistente.

– Representación: $\forall x [afeita(b, x) \leftrightarrow \neg afeita(x, x)]$

– Forma clausal:

$$\forall x [afeita(b, x) \leftrightarrow \neg afeita(x, x)]$$

$$\equiv \forall x [(afeita(b, x) \rightarrow \neg afeita(x, x)) \wedge (\neg afeita(x, x) \rightarrow afeita(b, x))]$$

$$\equiv \forall x [(\neg afeita(b, x) \vee \neg afeita(x, x)) \wedge (\neg \neg afeita(x, x) \vee afeita(b, x))]$$

$$\equiv \forall x [(\neg afeita(b, x) \vee \neg afeita(x, x)) \wedge (afeita(x, x) \vee afeita(b, x))]$$

$$\equiv \{ \{ \neg afeita(b, x), \neg afeita(x, x) \}, \{ afeita(x, x), afeita(b, x) \} \}$$

– Refutación:

1 $\{ \neg afeita(b, x), \neg afeita(x, x) \}$ Hipótesis

2 $\{ afeita(x, x), afeita(b, x) \}$ Hipótesis

3 $\{ \neg afeita(b, b) \}$ Factor de 1 con $[x/b]$

4 $\{ afeita(b, b) \}$ Factor de 2 con $[x/b]$

5 \square Resolvente de 3 y 4

Adecuación y completitud de la resolución

► Propiedades:

- Si C es una resolvente de C_1 y C_2 , entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
- Si D es un factor de C entonces $C \models D$.
- Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
- Si el conjunto de cláusulas S es refutable por resolución, entonces S es inconsistente.

- Teor.: El cálculo de resolución (para la lógica de primer orden sin igualdad) es adecuado y completo; es decir,

$$\text{Adecuado: } S \vdash_{Res} F \quad \implies \quad S \models F$$

$$\text{Completo: } S \models F \quad \implies \quad S \vdash_{Res} F$$

Decisión de no-consecuencia por resolución

- ▶ Enunciado: Comprobar, por resolución, que $\forall x [P(x) \vee Q(x)] \not\models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.

- ▶ Reducción 1: Comprobar que es consistente $\{\forall x [P(x) \vee Q(x)], \neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))\}$

- ▶ Reducción 2: Comprobar que es consistente $\{\{P(x), Q(x)\}, \{\neg P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\}$

- ▶ Resolución:

1 $\{P(x), Q(x)\}$ Hipótesis

2 $\{\neg P(a)\}$ Hipótesis

3 $\{\neg Q(b)\}$ Hipótesis

4 $\{Q(a)\}$ Resolvente de 1 y 2

5 $\{P(b)\}$ Resolvente de 1 y 3

- ▶ Modelo: $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$.

Bibliografía

1. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1996) pp. 137–141.
2. M.L. Bonet *Apuntes de LPO*. (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 34–40.
3. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 70–99.
4. M. Genesereth *Computational Logic (Chapter 9: Relational Resolution)* (Stanford University, 2003)
5. S. Hölldobler *Computational logic*. (U. de Dresden, 2004) pp. 71–74.
6. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 138–164.
7. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 50–61.
8. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 79–96.