

Lógica matemática y fundamentos (2015–16)

Tema 2: Deducción natural proposicional

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 2: Deducción natural proposicional

1. Reglas de deducción natural
2. Reglas derivadas
3. Resumen de reglas de deducción natural

Tema 2: Deducción natural proposicional

1. Reglas de deducción natural

Reglas de la conjunción

Reglas de la doble negación

Regla de eliminación del condicional

Regla derivada de modus tollens (MT)

Regla de introducción del condicional

Reglas de la disyunción

Regla de copia

Reglas de la negación

Reglas del bicondicional

2. Reglas derivadas

3. Resumen de reglas de deducción natural

Reglas de la conjunción

- ▶ Regla de introducción de la conjunción: $\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$
- ▶ Reglas de eliminación de la conjunción: $\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1$ $\frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$

- ▶ Ejemplo: $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$:

1 $p \wedge q$ premisa

2 r premisa

3 q $\wedge e_2$ 1

4 $q \wedge r$ $\wedge i$ 2,3

- ▶ Adecuación de las reglas de la conjunción:

- ▶ $\wedge i : \{F, G\} \models F \wedge G$

- ▶ $\wedge e_1 : F \wedge G \models F$

- ▶ $\wedge e_2 : F \wedge G \models G$

Reglas de la doble negación

- ▶ Regla de eliminación de la doble negación:

$$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$$

- ▶ Regla de introducción de la doble negación:

$$\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$$

- ▶ Ejemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$:

1 p premisa

2 $\neg\neg(q \wedge r)$ premisa

3 $\neg\neg p$ $\neg\neg i$ 1

4 $q \wedge r$ $\neg\neg e$ 2

5 r $\wedge e_2$ 4

6 $\neg\neg p \wedge r$ $\wedge i$ 3, 5

- ▶ Adecuación de las reglas de la doble negación:

- ▶ $\neg\neg e : \{\neg\neg F\} \models F$

- ▶ $\neg\neg i : \{F\} \models \neg\neg F$

Regla de eliminación del condicional

► Regla de eliminación del condicional: $\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$

► Ejemplo: $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p: G$

1 $\neg p \wedge q$ premisa

2 $\neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p$ premisa

3 $r \vee \neg p$ $\rightarrow e$ 1,2

► Ejemplo: $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$:

1 p premisa

2 $p \rightarrow q$ premisa

3 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premisa

4 q $\rightarrow e$ 1,2

5 $q \rightarrow r$ $\rightarrow e$ 1,3

6 r $\rightarrow e$ 4,5

Regla derivada de modus tollens (MT)

► Regla derivada de modus tollens:
$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} \text{ MT}$$

► Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premisa

2 p premisa

3 $\neg r$ premisa

4 $q \rightarrow r$ \rightarrow e 1, 2

5 $\neg q$ MT 3, 4

► Ejemplo: $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$:

1 $\neg p \rightarrow q$ premisa

2 $\neg q$ premisa

3 $\neg\neg p$ MT 1, 2

Regla de introducción del condicional

- ▶ Regla de introducción del condicional:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ G \end{array}}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$$

- ▶ Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$:

1 $p \rightarrow q$ premisa

2 $\neg q$ supuesto

3 $\neg p$ MT 1, 2

4 $\neg q \rightarrow \neg p$ $\rightarrow i$ 2 – 3

- ▶ Adecuación de la regla de introducción del condicional:
Si $F \models G$, entonces $\models F \rightarrow G$.

Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$:

1 $\neg q \rightarrow \neg p$ premisa

2	p	supuesto
---	-----	----------

3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
---	--------------	----------------

4	$\neg\neg q$	MT 1, 3
---	--------------	---------

5 $p \rightarrow \neg\neg q$ $\rightarrow i$ 2 – 4

- Ejemplo (de teorema): $\vdash p \rightarrow p$:

1	p	supuesto
---	-----	----------

2 $p \rightarrow p$ $\rightarrow i$ 1 – 1

Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$:

1	$q \rightarrow r$	supuesto
2	$\neg q \rightarrow \neg p$	supuesto
3	p	supuesto
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg$ i 3
5	$\neg\neg q$	MT 2, 4
6	q	$\neg\neg$ e 5
7	r	\rightarrow e 1, 6
8	$p \rightarrow r$	\rightarrow i 3 – 7
9	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	\rightarrow i 2 – 8
10	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	\rightarrow i 1 – 9

Reglas de la disyunción

- ▶ Reglas de introducción de la disyunción: $\frac{F}{F \vee G} \text{Vi}_1$ $\frac{G}{F \vee G} \text{Vi}_2$
- ▶ Regla de eliminación de la disyunción: $\frac{F \vee G \quad \begin{array}{|c|} \hline F \\ \vdots \\ H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline G \\ \vdots \\ H \\ \hline \end{array}}{H} \text{Ve}$
- ▶ Ejemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$:

1 $p \vee q$ premisa

2	p	supuesto
---	-----	----------

3	$q \vee p$	Vi_2 2
---	------------	-----------------

4	q	supuesto
---	-----	----------

5	$q \vee p$	Vi_1 4
---	------------	-----------------

6 $q \vee p$ Ve 1, 2 – 3, 4 – 5

Reglas de la disyunción

► Ejemplo: $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$:

1	$q \rightarrow r$	premisa
2	$p \vee q$	supuesto
3	p	supuesto
4	$p \vee r$	$\vee i_1$ 3
5	q	supuesto
6	r	$\rightarrow e$ 1, 5
7	$p \vee r$	$\vee i_2$ 6
8	$p \vee r$	$\vee e$ 2, 3 – 4, 5 – 7
9	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	$\rightarrow i$ 2 – 8

Regla de copia

- Ejemplo (usando la regla hyp): $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$:

1	p	supuesto
2	q	supuesto
3	p	hyp 1
4	$q \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 2 – 3
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow i$ 1 – 4

Reglas de la negación

- ▶ Extensiones de la lógica para usar falso:
 - ▶ Extensión de la sintaxis: \perp es una fórmula proposicional.
 - ▶ Extensión de la semántica: $I(\perp) = 0$ en cualquier interpretación I .
- ▶ Reglas de la negación:

- ▶ Regla de eliminación de lo falso:
$$\frac{\perp}{F} \perp e$$
- ▶ Regla de eliminación de la negación:
$$\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$$

- ▶ Adecuación de las reglas de la negación:
 - ▶ $\perp \models F$
 - ▶ $\{F, \neg F\} \models \perp$

Reglas de la negación

► Ejemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$:

1	$\neg p \vee q$	premisa																											
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">p</td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">$\neg p$</td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">\perp</td> <td style="padding: 5px;">$\neg e$ 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">q</td> <td style="padding: 5px;">$\perp e$ 4</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;">q</td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">7</td> <td style="padding: 5px;">q</td> <td style="padding: 5px;">$\vee e$ 1, 3 – 5, 6 – 6</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>			2	p	supuesto	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">$\neg p$</td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">\perp</td> <td style="padding: 5px;">$\neg e$ 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">q</td> <td style="padding: 5px;">$\perp e$ 4</td> </tr> </table>			3	$\neg p$	supuesto	4	\perp	$\neg e$ 2, 3	5	q	$\perp e$ 4	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;">q</td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> </table>			6	q	supuesto	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">7</td> <td style="padding: 5px;">q</td> <td style="padding: 5px;">$\vee e$ 1, 3 – 5, 6 – 6</td> </tr> </table>			7	q	$\vee e$ 1, 3 – 5, 6 – 6
2	p	supuesto																											
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">$\neg p$</td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">\perp</td> <td style="padding: 5px;">$\neg e$ 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">q</td> <td style="padding: 5px;">$\perp e$ 4</td> </tr> </table>			3	$\neg p$	supuesto	4	\perp	$\neg e$ 2, 3	5	q	$\perp e$ 4																		
3	$\neg p$	supuesto																											
4	\perp	$\neg e$ 2, 3																											
5	q	$\perp e$ 4																											
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;">q</td> <td style="padding: 5px;">supuesto</td> </tr> </table>			6	q	supuesto																								
6	q	supuesto																											
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">7</td> <td style="padding: 5px;">q</td> <td style="padding: 5px;">$\vee e$ 1, 3 – 5, 6 – 6</td> </tr> </table>			7	q	$\vee e$ 1, 3 – 5, 6 – 6																								
7	q	$\vee e$ 1, 3 – 5, 6 – 6																											
8	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 2 – 7																											

Reglas de la negación

- ▶ Regla de introducción de la negación:

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline F \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\neg F} \neg i$$

- ▶ Adecuación: Si $F \models \perp$, entonces $\models \neg F$.
- ▶ Ejemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$:

1 $p \rightarrow q$ premisa

2 $p \rightarrow \neg q$ premisa

3	p	supuesto
---	-----	----------

4	q	$\rightarrow e$ 1, 3
---	-----	----------------------

5	$\neg q$	$\rightarrow e$ 2, 3
---	----------	----------------------

6	\perp	$\neg e$ 4, 5
---	---------	---------------

7 $\neg p$ $\neg i$ 3 – 6

Reglas del bicondicional

► Regla de introducción del bicondicional:

► Ejemplo: $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$:

$$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$$

1	$p \wedge q$	supuesto
2	p	$\wedge e_1$ 1
3	q	$\wedge e_2$ 1
4	$q \wedge p$	$\wedge i$ 2, 3

$$5 \quad p \wedge q \rightarrow q \wedge p \quad \rightarrow i \ 1 - 4$$

6	$q \wedge p$	supuesto
7	q	$\wedge e_2$ 6
8	p	$\wedge e_1$ 6
9	$p \wedge q$	$\wedge i$ 7, 8

$$10 \quad q \wedge p \rightarrow p \wedge q \quad \rightarrow i \ 6 - 9$$

Reglas del bicondicional

- ▶ **Eliminación del bicondicional:** $\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1$ $\frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$
- ▶ Ejemplo: $p \leftrightarrow q, p \vee q \vdash p \wedge q$:

1 $p \leftrightarrow q$ premisa

2 $p \vee q$ premisa

3	p	supuesto	q	supuesto
4	$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow e_1$ 1	$q \rightarrow p$	$\leftrightarrow e_2$ 1
5	q	$\rightarrow e$ 4, 3	p	$\rightarrow e$ 4', 3'
6	$p \wedge q$	$\wedge i$ 3, 5	$p \wedge q$	$\wedge i$ 3', 5'

7 $p \wedge q$ $\vee e$ 2, 3 – 6, 3' – 6'

Tema 2: Deducción natural proposicional

1. Reglas de deducción natural

2. Reglas derivadas

Regla del modus tollens

Regla de introducción de doble negación

Regla de reducción al absurdo

Ley del tercio excluido

3. Resumen de reglas de deducción natural

Reglas de modus tollens

- ▶ Regla derivada de modus tollens (MT):

$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} \text{ MT}$$

- ▶ Derivación:

1 $F \rightarrow G$ premisa

2 $\neg G$ premisa

3 F supuesto

4 G \rightarrow e 1, 3

5 \perp \neg e 2, 4

6 $\neg F$ \neg i 2 – 4

Regla de introducción de doble negación

- ▶ Regla de introducción de la doble negación:

$$\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$$

- ▶ Derivación:

1 F premisa

2	$\neg F$	supuesto
---	----------	----------

3	\perp	$\neg e$ 1, 2
---	---------	---------------

4 $\neg\neg F$ $\neg i$ 2 – 3

Regla de reducción al absurdo (RAA)

- ▶ Regla de reducción al absurdo:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{F} \text{ RAA}$$

- ▶ Derivación:

1 $\neg F \rightarrow \perp$ premisa

2 $\neg F$ supuesto

3 \perp $\rightarrow e$ 1, 2

4 $\neg\neg F$ $\neg i$ 2 – 3

5 F $\neg e$ $\neg 4$

Ley del tercio excluido (LEM)

- ▶ Ley del tercio excluido (LEM):

$$\frac{}{F \vee \neg F} \text{LEM}$$

- ▶ Derivación:

1	$\neg(F \vee \neg F)$	supuesto
2	F	supuesto
3	$F \vee \neg F$	$\vee i_1$ 2
4	\perp	$\neg e$ 1, 3
5	$\neg F$	$\neg i$ 2 – 4
6	$F \vee \neg F$	$\vee i_2$ 5
7	\perp	$\neg e$ 1, 6
8	$F \vee \neg F$	RAA 1 – 7

Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

► Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$:

1 $p \rightarrow q$ premisa

2 $p \vee \neg p$ LEM

3	p	supuesto
---	-----	----------

4	q	\rightarrow e 1, 3
---	-----	----------------------

5	$\neg p \vee q$	\vee i ₂ 4
---	-----------------	-------------------------

6	$\neg p$	supuesto
---	----------	----------

7	$\neg p \vee q$	\vee i ₁ 6
---	-----------------	-------------------------

8 $\neg p \vee q$ \vee e 2, 3 – 5, 6 – 7

Tema 2: Deducción natural proposicional

1. Reglas de deducción natural
2. Reglas derivadas
3. Resumen de reglas de deducción natural

Resumen de reglas de deducción natural

	Introducción	Eliminación
\wedge	$\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$	$\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1 \quad \frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$
\vee	$\frac{F}{F \vee G} \vee i_1 \quad \frac{G}{F \vee G} \vee i_2$	$\frac{F \vee G \quad \boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ H \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} G \\ \vdots \\ H \end{array}}}{H} \vee e$
\rightarrow	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ G \end{array}}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$	$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$

Resumen de reglas de deducción natural

	Introducción	Eliminación
\neg	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg F} \neg i$	$\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$
\perp		$\frac{\perp}{F} \perp e$
$\neg\neg$		$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$
\leftrightarrow	$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$	$\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1 \quad \frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$

- Adecuación y completitud del cálculo de deducción natural.

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000).
Cap. 16: Cálculo deductivo.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998).
3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002).
Cap. 4: Cálculo deductivo. Deducibilidad.
4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000)
Cap. 1: Propositional logic.
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
Cap. 3.6: El método de la deducción natural.