

# Lógica matemática y fundamentos (2015–16)

## Tema 4: Formas normales

José A. Alonso Jiménez  
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 4: Formas normales

1. Forma normal conjuntiva
2. Forma normal disyuntiva
3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos

## Tema 4: Formas normales

### 1. Forma normal conjuntiva

Definición de forma normal conjuntiva

Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva

Decisión de validez mediante FNC

### 2. Forma normal disyuntiva

### 3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos

## Forma normal conjuntiva

- ▶ Átomos y literales:
  - ▶ Def.: Un **átomo** es una variable proposicional (p.e.  $p, q, \dots$ ).
  - ▶ Def.: Un **literal** es un átomo o su negación (p.e.  $p, \neg p, q, \neg q, \dots$ ).
  - ▶ Notación:  $L, L_1, L_2, \dots$  representarán literales.
- ▶ Forma normal conjuntiva:
  - ▶ Def.: Una fórmula está en **forma normal conjuntiva (FNC)** si es una conjunción de disyunciones de literales; es decir, es de la forma
$$(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m}).$$
  - ▶ Ejemplos:  $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$  está en FNC.  
 $(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$  no está en FNC.
  - ▶ Def.: Una fórmula  $G$  es una **forma normal conjuntiva (FNC)** de la fórmula  $F$  si  $G$  está en forma normal conjuntiva y es equivalente a  $F$ .
  - ▶ Ejemplo: Una FNC de  $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$  es  $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$ .

## Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva

**Algoritmo:** Aplicando a una fórmula  $F$  los siguientes pasos se obtiene una forma normal conjuntiva de  $F$ ,  $FNC(F)$ :

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad (1)$$

2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \quad (2)$$

3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad (3)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \quad (4)$$

$$\neg\neg A \equiv A \quad (5)$$

4. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (6)$$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad (7)$$

## Ejemplos de cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de  $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ :

$$\begin{aligned}
 & \neg(p \wedge (q \rightarrow r)) \\
 \equiv & \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) && [\text{por (2)}] \\
 \equiv & \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) && [\text{por (3)}] \\
 \equiv & \neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) && [\text{por (4)}] \\
 \equiv & \neg p \vee (q \wedge \neg r) && [\text{por (5)}] \\
 \equiv & (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) && [\text{por (6)}]
 \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una FNC de  $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ :

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \\
 \equiv & (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) && [\text{por (2)}] \\
 \equiv & \neg p \vee q \vee \neg q \vee p
 \end{aligned}$$

## Cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ :

$$\begin{aligned}
 & (p \leftrightarrow q) \rightarrow r \\
 \equiv & (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow r \\
 \equiv & \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r \\
 \equiv & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r \\
 \equiv & (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)) \vee r \\
 \equiv & ((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p)) \vee r \\
 \equiv & ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \vee r \\
 \equiv & (((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg p)) \vee r \\
 \equiv & (((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \wedge ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p))) \vee r \\
 \equiv & (((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee r) \wedge (((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r) \\
 \equiv & (((p \vee q) \vee r) \wedge ((\neg q \vee q) \vee r)) \wedge (((p \vee \neg p) \vee r) \wedge ((\neg q \vee \neg p) \vee r)) \\
 \equiv & (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r) \\
 \equiv & (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)
 \end{aligned}$$

## Procedimiento de decisión de validez mediante FNC

▶ Literales complementarios:

- ▶ El **complementario** de un literal  $L$  es  $L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$

▶ Propiedades de reducción de tautologías:

- ▶  $F_1 \wedge \dots \wedge F_n$  es una tautología syss  $F_1, \dots, F_n$  lo son.
- ▶  $L_1 \vee \dots \vee L_n$  es una tautología syss  $\{L_1, \dots, L_n\}$  contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen  $i, j$  tales que  $L_i = L_j^c$ ).

▶ **Algoritmo de decisión de tautologías mediante FNC**

- ▶ Entrada: Una fórmula  $F$ .

- ▶ Procedimiento:

1. Calcular una FNC de  $F$ .
2. Decidir si cada una de las disyunciones de la FNC tiene algún par de literales complementarios.



## Ejemplos de decisión de validez mediante FNC

- ▶  $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$  no es tautología:

$$\text{FNC}(\neg(p \wedge (q \rightarrow r))) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

Contramodelos de  $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ :

$$I_1 \text{ tal que } I_1(p) = 1 \text{ y } I_1(q) = 0$$

$$I_2 \text{ tal que } I_2(p) = 1 \text{ y } I_2(r) = 1$$

- ▶  $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$  es tautología:

$$\text{FNC}((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)) = \neg p \vee q \vee \neg q \vee p$$

- ▶  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$  no es tautología:

$$\text{FNC}((p \leftrightarrow q) \rightarrow r) = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$$

Contramodelos de  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ :

$$I_1 \text{ tal que } I_1(p) = 0, I_1(q) = 0 \text{ y } I_1(r) = 0$$

$$I_2 \text{ tal que } I_2(p) = 1, I_2(q) = 1 \text{ y } I_2(r) = 0$$

## Tema 4: Formas normales

### 1. Forma normal conjuntiva

### 2. Forma normal disyuntiva

Definición de forma normal disyuntiva

Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

### 3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos

## Definición de forma normal disyuntiva

- ▶ Def.: Una fórmula está en **forma normal disyuntiva (FND)** si es una disyunción de conjunciones de literales; es decir, es de la forma

$$(L_{1,1} \wedge \cdots \wedge L_{1,n_1}) \vee \cdots \vee (L_{m,1} \wedge \cdots \wedge L_{m,n_m}).$$

- ▶ Ejemplos:  $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$  está en FND.

$$(\neg p \wedge q) \vee (q \rightarrow p) \text{ no está en FND.}$$

- ▶ Def.: Una fórmula  $G$  es una **forma normal disyuntiva (FND)** de la fórmula  $F$  si  $G$  está en forma normal disyuntiva y es equivalente a  $F$ .

- ▶ Ejemplo: Una FND de  $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$  es  $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$ .

## Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva

**Algoritmo:** Aplicando a una fórmula  $F$  los siguientes pasos se obtiene una forma normal disyuntiva de  $F$ ,  $FND(F)$ :

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad (1)$$

2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \quad (2)$$

3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad (3)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \quad (4)$$

$$\neg\neg A \equiv A \quad (5)$$

4. Interiorizar las conjunciones usando las equivalencias

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (6)$$

$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \quad (7)$$

## Ejemplos de cálculo de forma normal disyuntiva

- ▶ Ejemplo de cálculo de una FND de  $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ :

$$\begin{aligned}
 & \neg(p \wedge (q \rightarrow r)) \\
 \equiv & \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) && [\text{por (2)}] \\
 \equiv & \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) && [\text{por (3)}] \\
 \equiv & \neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) && [\text{por (4)}] \\
 \equiv & \neg p \vee (q \wedge \neg r) && [\text{por (5)}]
 \end{aligned}$$

- ▶ Ejemplo de cálculo de una FND de  $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$ :

$$\begin{aligned}
 & \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)) \\
 \equiv & \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \wedge q)) && [\text{por (2)}] \\
 \equiv & \neg\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(p \wedge q) && [\text{por (4)}] \\
 \equiv & (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q) && [\text{por (5)}] \\
 \equiv & (\neg p \wedge (p \wedge q)) \vee (\neg q \wedge (p \wedge q)) && [\text{por (7)}] \\
 \equiv & (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p \wedge q)
 \end{aligned}$$

## Procedimiento de decisión de satisfacibilidad mediante FND

- ▶ Propiedades de reducción de satisfacibilidad:
  - ▶  $F_1 \vee \dots \vee F_n$  es satisfacible syss alguna de las fórmulas  $F_1, \dots, F_n$  lo es.
  - ▶  $L_1 \wedge \dots \wedge L_n$  es satisfacible syss  $\{L_1, \dots, L_n\}$  no contiene ningún par de literales complementarios.
- ▶ Algoritmo de decisión de satisfacibilidad mediante FND:
  - ▶ Entrada: Una fórmula  $F$ .
  - ▶ Procedimiento:
    1. Calcular una FND de  $F$ .
    2. Decidir si alguna de las conjunciones de la FND no tiene un par de literales complementarios.

## Ejemplos de decisión de satisfacibilidad mediante FND

- ▶  $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$  es satisfacible:

$$\text{FND}(\neg(p \wedge (q \rightarrow r))) = \neg p \vee (q \wedge \neg r)$$

Modelos de  $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ :

$$I_1 \text{ tal que } I_1(p) = 0$$

$$I_2 \text{ tal que } I_2(q) = 1 \text{ y } I_2(r) = 0$$

- ▶  $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$  es insatisfacible:

$$\text{FND}(\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))) = (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p \wedge q)$$

## Tema 4: Formas normales

1. Forma normal conjuntiva
2. Forma normal disyuntiva
3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos
  - Forma normal disyuntiva por tableros
  - Forma normal conjuntiva por tableros

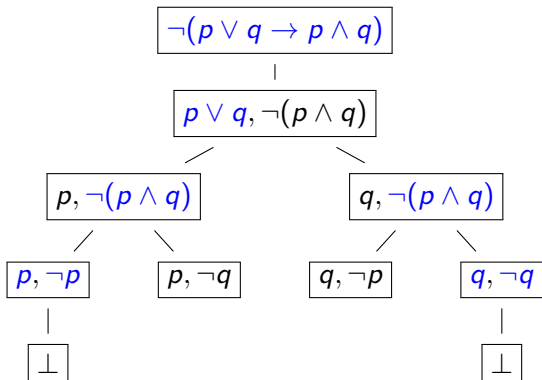


## Forma normal disyuntiva por tableros

- ▶ Prop.: Sea  $F$  una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de  $\{F\}$  son  $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$ , entonces una forma normal disyuntiva de  $F$  es  $(L_{1,1} \wedge \dots \wedge L_{1,n_1}) \vee \dots \vee (L_{m,1} \wedge \dots \wedge L_{m,n_m})$ .

## Forma normal disyuntiva por tableros

- Ejemplo: Forma normal disyuntiva de  $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$ .



Una forma normal disyuntiva de  $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$  es  $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ .

## Forma normal conjuntiva por tableros

- ▶ Prop.: Sea  $F$  una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de  $\{\neg F\}$  son  $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$ , entonces una forma normal conjuntiva de  $F$  es  $(L_{1,1}^c \vee \dots \vee L_{1,n_1}^c) \wedge \dots \wedge (L_{m,1}^c \vee \dots \vee L_{m,n_m}^c)$ .

- ▶ Ejemplo: Forma normal conjuntiva de  $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ .

- ▶ Un árbol completo  $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$  está en la transparencia anterior.
- ▶ Una forma normal disyuntiva de  $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$  es  $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ .
- ▶ Una forma normal conjuntiva de  $p \vee q \rightarrow p \wedge q$  es  $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ .

$$\begin{aligned}
 p \vee q \rightarrow p \wedge q &\equiv \neg \neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q) \\
 &\equiv \neg((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\
 &\equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p) \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg \neg p) \\
 &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)
 \end{aligned}$$

## Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000)  
Cap. 8 (Equivalencia lógica) y 10 (Formas normales).
2. M. Ben-Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.)*. (Springer, 2001)  
Cap. 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).
3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)  
Cap. 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).
4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000)  
Cap. 1 (Propositional logic).
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)  
Cap. 4.4 (Formas normales).