Ejercicio 1 [3 puntos] *Demostrar o refutar razonadamente las siguientes afirmaciones:*

1. *Si un conjunto de literales S es inconsistente, entonces existe un literal $L \in S$ tal que $\neg L \in S$.*
2. *Si un conjunto de fórmulas S es inconsistente, entonces existe una fórmula $F \in S$ tal que $\neg F \in S$.*
3. *Todas las formas de Skolem de una fórmula son lógicamente equivalentes.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es cierta, ya que si no existe un literal $L \in S$ tal que $\neg L \in S$ el conjunto S es consistente y un modelo de S es la intepretación I tal que para todo p, $I(p) = 1$ syss $p \in S$.

Solución del apartado 2: La proposición es falsa. Por ejemplo, el conjunto

$$S = \{p, p \to q, p \to \neg q\}$$

es inconsistente y no existe ninguna fórmula $F \in S$ tal que $\neg F \in S$.

Solución del apartado 3: Es falso, ya que $P(a)$ y $P(b)$ son dos formas de Skolem de $\exists x P(x)$ que no son lógicamente equivalentes (por ejemplo, en la interpretación I de universo $\{1, 2\}$ con $I(a) = 1$, $I(b) = 2$ e $I(P) = \{1\}$, se tiene que $I \models P(a)$) e $I \not\models P(b)$).

Ejercicio 2 [2 puntos] *Determinar, mediante tableros semánticos, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por tableros semánticos y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:*

1. *La fórmula $p \to (q \lor r) \land (\neg q \land (p \lor r)) \to (r \to q)$ es válida*
2. *La fórmula $\forall x \exists y Q(x, y)$ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas*
   $$\{\exists y \forall x P(x, y),\ \forall x \forall y (\neg Q(x, y) \to \neg P(x, y))\}.$$

Solución:

Apartado 1. La afirmación es falsa. Un tablero completo de la negación de la fórmula es

1.	$\neg(p \to ((q \vee r) \wedge (\neg q \wedge (p \vee r)) \to (r \to q)))$	
2.	p	(1)
3.	$\neg((q \vee r) \wedge (\neg q \wedge (p \vee r)) \to (r \to q))$	(1)
4.	$(q \vee r) \wedge (\neg q \wedge (p \vee r)$	(3)
5.	$\neg(r \to q)$	(3)
6.	$q \vee r$	(4)
7.	$\neg q \wedge (p \vee r)$	(4)
8.	r	(5)
9.	$\neg q$	(5)
10.	$\neg q$	(7)
11.	$p \vee r$	(7)

12. q (6)
Cerrada 12,9

13. r (6)

14. p (11)
Abierta $\{p, \neg q, r\}$

15. r (11)
Abierta $\{p, \neg q, r\}$

Al tener ramas abiertas, la fórmula no es válida y un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ e $I(r) = 1$.

Apartado 2. La afirmación es cierta. La demostración es

1.	$\exists y \forall x P(x,y)$	
2.	$\forall x \forall y(\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))$	
3.	$\neg \forall x \exists y Q(x,y)$	
4.	$\forall x P(x,a)$	(1)
5.	$\neg \exists y Q(b,y)$	(3)
6.	$\neg Q(b,a)$	(5)
7.	$P(b,a)$	(4)
8.	$\forall y(\neg Q(b,y) \to \neg P(b,y))$	(2)
9.	$\neg Q(b,a) \to \neg P(b,a))$	(8)

10. $\neg\neg Q(b,a)$ (9)
Cerrada 10,6

11. $\neg P(b,a)$ (9)
Cerrada 11,7

Ejercicio 3 [2 puntos] *Determinar, mediante resolución, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por resolución y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:*

1. *El siguiente conjunto de cláusulas es consistente*

$$\begin{array}{ll} \{ & \{\neg P(x,y), R(x,y), Q(x), \neg P(y,x)\}, \\ & \{\neg R(x,y), \neg Q(y), R(y,x)\}, \\ & \{R(x,y), \neg Q(x), \neg Q(y)\}, \\ & \{P(a,b)\}, \\ & \{P(b,a)\}, \\ & \{\neg R(a,b)\} \ \} \end{array}$$

2. *La fórmula* $\forall x(E(x) \land \neg P(x) \to \exists y(A(y) \land I(y,x)))$ *es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas*
$$\{\exists x(M(x) \land E(x) \land \forall y(I(y,x) \to M(y))), \forall x(M(x) \to \neg P(x))\}$$

Solución:

Apartado 1. La demostración por resolución es

1.	$\{\neg P(x,y), R(x,y), Q(x), \neg P(y,x)\}$	
2.	$\{\neg R(x,y), \neg Q(y), R(y,x)\}$	
3.	$\{R(x,y), \neg Q(x), \neg Q(y)\}$	
4.	$\{P(a,b)\}$	
5.	$\{P(b,a)\}$	
6.	$\{\neg R(a,b)\}$	
7.	$\{R(a,b), Q(a), \neg P(b,a)\}$	por 1 y 4 con $[x/a, y/b]$
8.	$\{Q(a), \neg P(b,a)\}$	por 7 y 6
9.	$\{Q(a)\}$	por 8 y 5
0.	$\{\neg R(b,a), \neg Q(a)\}$	por 2 y 6 con $[y/a, x/b]$
1.	$\{\neg R(b,a)\}$	por 9 y 10
2.	$\{\neg Q(a), \neg Q(b)\}$	por 3 y 6 con $[x/a, y/b]$
3.	$\{\neg Q(b)\}$	por 12 y 9
4.	$\{R(b,a), Q(b), \neg P(a,b)\}$	por 1 y 5 con $[x/b, y/a]$
5.	$\{Q(b), \neg P(a,b)\}$	por 14 y 11
6.	$\{\neg P(a,b)\}$	por 15 y 13
7.	$\square$	por 16 y 4

Por tanto, el conjunto es inconsistente.

Apartado 2. La afirmación es falsa. Para hacer la resolución, en primer lugar se calculan las formas clausales de las premisas y de la negación de la conclusión:

$$\begin{array}{ll} & \exists x(M(x) \land E(x) \land \forall y(I(y,x) \to M(y))) \\ \equiv & \exists x(M(x) \land E(x) \land \forall y(\neg I(y,x) \lor M(y))) \\ \equiv & \exists x \forall y(M(x) \land E(x) \land (\neg I(y,x) \lor M(y))) \\ \equiv_{sat} & \forall y(M(a) \land E(a) \land (\neg I(y,a) \lor M(y))) \\ \equiv & \{\{M(a)\}, \{E(a)\}, \{\neg I(y,a), M(y)\}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \forall x(M(x) \to \neg P(x)) \\ \equiv & \forall x(\neg M(x) \lor \neg P(x)) \\ \equiv & \{\{\neg M(x), \neg P(x)\}\} \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x(E(x) \land \neg P(x) \to \exists y(A(y) \land I(y,x)))) \\
\equiv & \exists x \neg(E(x) \land \neg P(x) \to \exists y(A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \exists x(E(x) \land \neg P(x) \land \neg\exists y(A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \exists x(E(x) \land \neg P(x) \land \forall y \neg(A(y) \land I(y,x))) \\
\equiv & \exists x(E(x) \land \neg P(x) \land \forall y(\neg A(y) \lor \neg I(y,x))) \\
\equiv & \exists x \forall y(E(x) \land \neg P(x) \land (\neg A(y) \lor \neg I(y,x))) \\
\approx & \forall y(E(b) \land \neg P(b) \land (\neg A(y) \lor \neg I(y,b))) \\
\equiv & \{\{E(b)\},\{\neg P(b)\},\{\neg A(y),\neg I(y,b)\}\}
\end{array}
$$

La resolución es

1	$\{M(a)\}$	Premisa
2	$\{E(a)\}$	Premisa
3	$\{\neg I(y,a), M(y)\}$	Premisa
4	$\{\neg M(x), \neg P(x)\}$	Premisa
5	$\{E(b)\}$	Premisa
6	$\{\neg P(b)\}$	Premisa
7	$\{\neg A(y), \neg I(y,b)\}$	Premisa
8	$\{\neg P(a)\}$	Resolvente de 1.1 y 4.1 con $\sigma = [x/a]$
9	$\{\neg I(x,a), \neg P(x)\}$	Resolvente de 3.2 y 4.1 con $\sigma = [y/x]$

Como no se alcanza la cláusula vacía, la fórmula no es consecuencia. Un contramodelo es (U,I) con $U = \{a,b\}$, $I(M) = \{a\}$, $I(E) = \{a,b\}$, $I(I) = \emptyset$, $I(P) = \emptyset$ y $I(A) = \emptyset$

Ejercicio 4 [3 puntos] *En el ordenador.*