

Ejercicio 1 [3 puntos] *Demostrar o refutar razonadamente las siguientes afirmaciones:*

1. Si un conjunto de literales S es inconsistente, entonces existe un literal $L \in S$ tal que $\neg L \in S$.
2. Si un conjunto de fórmulas S es inconsistente, entonces existe una fórmula $F \in S$ tal que $\neg F \in S$.
3. Todas las formas de Skolem de una fórmula son lógicamente equivalentes.

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es cierta, ya que si no existe un literal $L \in S$ tal que $\neg L \in S$ el conjunto S es consistente y un modelo de S es la interpretación I tal que para todo p , $I(p) = 1$ si y sólo si $p \in S$.

Solución del apartado 2: La proposición es falsa. Por ejemplo, el conjunto

$$S = \{p, p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q\}$$

es inconsistente y no existe ninguna fórmula $F \in S$ tal que $\neg F \in S$.

Solución del apartado 3: Es falso, ya que $P(a)$ y $P(b)$ son dos formas de Skolem de $\exists xP(x)$ que no son lógicamente equivalentes (por ejemplo, en la interpretación I de universo $\{1, 2\}$ con $I(a) = 1$, $I(b) = 2$ e $I(P) = \{1\}$, se tiene que $I \models P(a)$ e $I \not\models P(b)$).

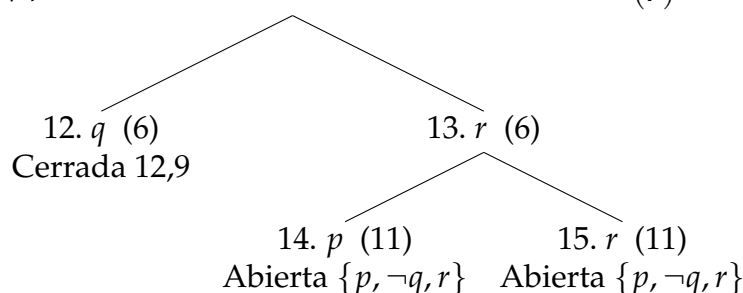
Ejercicio 2 [2 puntos] *Determinar, mediante tableros semánticos, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por tableros semánticos y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:*

1. La fórmula $p \rightarrow (q \vee r) \wedge (\neg q \wedge (p \vee r)) \rightarrow (r \rightarrow q)$ es válida
2. La fórmula $\forall x \exists y Q(x, y)$ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{\exists y \forall x P(x, y), \forall x \forall y (\neg Q(x, y) \rightarrow \neg P(x, y))\}$.

Solución:

Apartado 1. La afirmación es falsa. Un tablero completo de la negación de la fórmula es

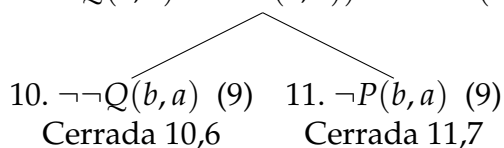
1. $\neg(p \rightarrow ((q \vee r) \wedge (\neg q \wedge (p \vee r)) \rightarrow (r \rightarrow q)))$
2. p (1)
3. $\neg((q \vee r) \wedge (\neg q \wedge (p \vee r)) \rightarrow (r \rightarrow q))$ (1)
4. $(q \vee r) \wedge (\neg q \wedge (p \vee r))$ (3)
5. $\neg(r \rightarrow q)$ (3)
6. $q \vee r$ (4)
7. $\neg q \wedge (p \vee r)$ (4)
8. r (5)
9. $\neg q$ (5)
10. $\neg q$ (7)
11. $p \vee r$ (7)



Al tener ramas abiertas, la fórmula no es válida y un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ e $I(r) = 1$.

Apartado 2. La afirmación es cierta. La demostración es

1. $\exists y \forall x P(x, y)$
2. $\forall x \forall y (\neg Q(x, y) \rightarrow \neg P(x, y))$
3. $\neg \forall x \exists y Q(x, y)$
4. $\forall x P(x, a)$ (1)
5. $\neg \exists y Q(b, y)$ (3)
6. $\neg Q(b, a)$ (5)
7. $P(b, a)$ (4)
8. $\forall y (\neg Q(b, y) \rightarrow \neg P(b, y))$ (2)
9. $\neg Q(b, a) \rightarrow \neg P(b, a)$ (8)



Ejercicio 3 [2 puntos] *Determinar, mediante resolución, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por resolución y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:*

1. *El siguiente conjunto de cláusulas es consistente*

$$\{ \{ \neg P(x, y), R(x, y), Q(x), \neg P(y, x) \}, \\ \{ \neg R(x, y), \neg Q(y), R(y, x) \}, \\ \{ R(x, y), \neg Q(x), \neg Q(y) \}, \\ \{ P(a, b) \}, \\ \{ P(b, a) \}, \\ \{ \neg R(a, b) \} \}$$

2. La fórmula $\forall x(E(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge I(y, x)))$ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas

$$\{ \exists x(M(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(I(y, x) \rightarrow M(y))), \forall x(M(x) \rightarrow \neg P(x)) \}$$

Solución:

Apartado 1. La demostración por resolución es

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. $\{ \neg P(x, y), R(x, y), Q(x), \neg P(y, x) \}$ | |
| 2. $\{ \neg R(x, y), \neg Q(y), R(y, x) \}$ | |
| 3. $\{ R(x, y), \neg Q(x), \neg Q(y) \}$ | |
| 4. $\{ P(a, b) \}$ | |
| 5. $\{ P(b, a) \}$ | |
| 6. $\{ \neg R(a, b) \}$ | |
| 7. $\{ R(a, b), Q(a), \neg P(b, a) \}$ | por 1 y 4 con $[x/a, y/b]$ |
| 8. $\{ Q(a), \neg P(b, a) \}$ | por 7 y 6 |
| 9. $\{ Q(a) \}$ | por 8 y 5 |
| 0. $\{ \neg R(b, a), \neg Q(a) \}$ | por 2 y 6 con $[y/a, x/b]$ |
| 1. $\{ \neg R(b, a) \}$ | por 9 y 10 |
| 2. $\{ \neg Q(a), \neg Q(b) \}$ | por 3 y 6 con $[x/a, y/b]$ |
| 3. $\{ \neg Q(b) \}$ | por 12 y 9 |
| 4. $\{ R(b, a), Q(b), \neg P(a, b) \}$ | por 1 y 5 con $[x/b, y/a]$ |
| 5. $\{ Q(b), \neg P(a, b) \}$ | por 14 y 11 |
| 6. $\{ \neg P(a, b) \}$ | por 15 y 13 |
| 7. \square | por 16 y 4 |

Por tanto, el conjunto es inconsistente.

Apartado 2. La afirmación es falsa. Para hacer la resolución, en primer lugar se calculan las formas clausales de las premisas y de la negación de la conclusión:

$$\begin{aligned} & \exists x(M(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(I(y, x) \rightarrow M(y))) \\ \equiv & \exists x(M(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(\neg I(y, x) \vee M(y))) \\ \equiv & \exists x \forall y(M(x) \wedge E(x) \wedge (\neg I(y, x) \vee M(y))) \\ \equiv_{sat} & \forall y(M(a) \wedge E(a) \wedge (\neg I(y, a) \vee M(y))) \\ \equiv & \{ \{ M(a) \}, \{ E(a) \}, \{ \neg I(y, a), M(y) \} \} \\ & \forall x(M(x) \rightarrow \neg P(x)) \\ \equiv & \forall x(\neg M(x) \vee \neg P(x)) \\ \equiv & \{ \{ \neg M(x), \neg P(x) \} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \neg(\forall x(E(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge I(y, x)))) \\
\equiv & \exists x \neg(E(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge I(y, x))) \\
\equiv & \exists x(E(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg \exists y(A(y) \wedge I(y, x))) \\
\equiv & \exists x(E(x) \wedge \neg P(x) \wedge \forall y \neg(A(y) \wedge I(y, x))) \\
\equiv & \exists x(E(x) \wedge \neg P(x) \wedge \forall y(\neg A(y) \vee \neg I(y, x))) \\
\equiv & \exists x \forall y(E(x) \wedge \neg P(x) \wedge (\neg A(y) \vee \neg I(y, x))) \\
\approx & \forall y(E(b) \wedge \neg P(b) \wedge (\neg A(y) \vee \neg I(y, b))) \\
\equiv & \{\{E(b)\}, \{\neg P(b)\}, \{\neg A(y), \neg I(y, b)\}\}
\end{aligned}$$

La resolución es

1	$\{M(a)\}$	Premisa
2	$\{E(a)\}$	Premisa
3	$\{\neg I(y, a), M(y)\}$	Premisa
4	$\{\neg M(x), \neg P(x)\}$	Premisa
5	$\{E(b)\}$	Premisa
6	$\{\neg P(b)\}$	Premisa
7	$\{\neg A(y), \neg I(y, b)\}$	Premisa
8	$\{\neg P(a)\}$	Resolvente de 1.1 y 4.1 con $\sigma = [x/a]$
9	$\{\neg I(x, a), \neg P(x)\}$	Resolvente de 3.2 y 4.1 con $\sigma = [y/x]$

Como no se alcanza la cláusula vacía, la fórmula no es consecuencia. Un contra-modelo es (U, I) con $U = \{a, b\}$, $I(M) = \{a\}$, $I(E) = \{a, b\}$, $I(I) = \emptyset$, $I(P) = \emptyset$ y $I(A) = \emptyset$

Ejercicio 4 [3 puntos] *En el ordenador.*
