
Ejercicio 1 [3 puntos] *Demostrar o refutar razonadamente las siguientes afirmaciones:*

1. Si la fórmula F no es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas S , entonces $\neg F$ es consecuencia lógica de S .
2. Existe una fórmula F sin símbolos de igualdad tal que todos los modelos de F tienen al menos 2 elementos.
3. Si la cláusula C es consecuencia de las cláusulas C_1 y C_2 , entonces C es una resolvente de C_1 y C_2 .

Solución:

El apartado 1 es falso. Por ejemplo, si $S = \{p\}$ y $F = q$, entonces F no es consecuencia de S pero $\neg F$ tampoco lo es.

El apartado 2 es falso. Por ejemplo, si F es la fórmula $P(a) \wedge \neg P(b)$ todos los modelos de F tienen al menos dos elementos.

El apartado 3 es falso. Por ejemplo, si $C_1 = \{p\}$, $C_2 = \{q\}$ y $C = \{p, q\}$, entonces C es consecuencia de las cláusulas C_1 y C_2 pero C no es una resolvente de C_1 y C_2 .

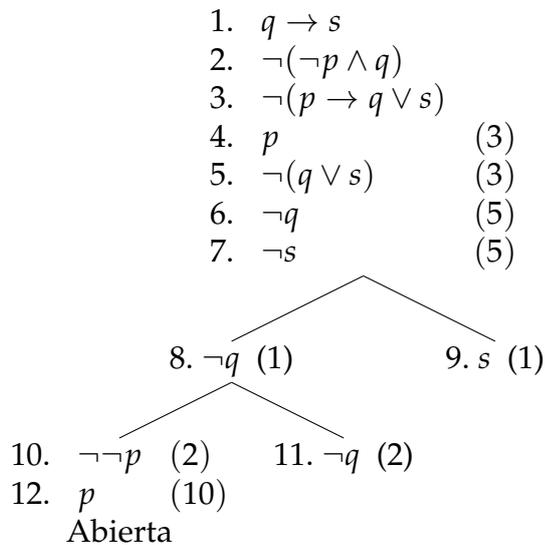
Ejercicio 2 [2 puntos] *Determinar, mediante tableros semánticos, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por tableros semánticos y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:*

1. $p \rightarrow q \vee s$ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{q \rightarrow s, \neg(\neg p \wedge q)\}$
2. $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$ es lógicamente válida.

Solución:

Solución del apartado 1 La fórmula es consecuencia del conjunto $\{q \rightarrow s, \neg(\neg p \wedge q), \neg(p \rightarrow q \vee s)\}$ tiene un tablero completo cerrado.

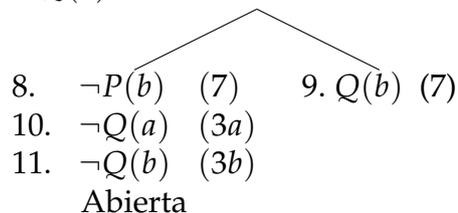
Como el tablero



tiene una rama abierta, la fórmula no es consecuencia. Además, un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = 1, I(q) = I(s) = 0$.

Solución del apartado 1 El tablero de la negación de la fórmula es

1. $\neg(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)))$
2. $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ (1)
3. $\neg(\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$ (1)
4. $\exists xP(x)$ (3)
5. $\neg\exists xQ(x)$ (3)
6. $P(a)$ (4)
7. $P(b) \rightarrow Q(b)$ (2)



Como tiene una rama abierta, la fórmula no es válida. Un contraejemplo obtenido a partir del tablero es (U, I) tal que $U = \{a, b\}, I(P) = \{a\}, I(Q) = \emptyset$.

Ejercicio 3 [2 puntos] *Determinar, mediante resolución, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. En caso afirmativo, proporcionar una prueba por resolución y, en caso negativo, un modelo que lo justifique:*

1. $\{p \vee q \rightarrow r \vee s, \neg(p \wedge \neg r \wedge s), \neg(p \rightarrow r \wedge s)\}$ es consistente.
2. $\{\forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y)), \forall x \forall y (Q(x, y) \rightarrow R(x, y))\} \models \forall x \exists y (P(x, y) \wedge R(x, y))$

Solución:

Solución del apartado 1 En primer lugar se calcula su forma clausal. La de la primera fórmula es

$$\begin{aligned}
& p \vee q \rightarrow r \vee s \\
\equiv & \neg(p \vee q) \vee (r \vee s) \\
\equiv & (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \vee s) \\
\equiv & (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg q \vee r \vee s) \\
\equiv & \{\{\neg p, r, s\}, \{\neg q, r, s\}\}
\end{aligned}$$

La de la segunda fórmula es

$$\begin{aligned}
& \neg(p \wedge \neg r \wedge s) \\
\equiv & \neg p \vee \neg(\neg r \wedge s) \\
\equiv & \neg p \vee (\neg\neg r \vee \neg s) \\
\equiv & \neg p \vee (r \vee \neg s) \\
\equiv & \{\{\neg p, r, \neg s\}\}
\end{aligned}$$

La de la tercera fórmula es

$$\begin{aligned}
& \neg(p \rightarrow r \wedge s) \\
\equiv & p \wedge \neg(r \wedge s) \\
\equiv & p \wedge (\neg r \vee \neg s) \\
\equiv & \{\{p\}, \{\neg r, \neg s\}\}
\end{aligned}$$

La resolución es

1. $\{\neg p, r, s\}$
2. $\{\neg q, r, s\}$
3. $\{\neg p, r, \neg s\}$
4. $\{p\}$
5. $\{\neg r, \neg s\}$
6. $\{r, s\}$ de 1 y 4
7. $\{r, \neg s\}$ de 3 y 4
8. $\{\neg s\}$ de 5 y 7
9. $\{r\}$ de 6 y 8

Durante la resolución las siguientes cláusulas están subsumidas: la 1 (por la 6), la 3 (por la 7), la 5 (por la 8), la 7 (por la 8), la 2 (por la 9) y la 6 (por la 9).

Como no se llega a la cláusula vacía, el conjunto es consistente y un modelo es I tal que $I(p) = I(r) = 1, I(s) = 0$.

Solución del apartado 2 En primer lugar se calcula las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión. La de primera hipótesis es

$$\begin{aligned}
& \forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y)) \\
\approx & \forall x (P(x, f(x)) \wedge Q(x, f(x))) \\
\equiv & \{\{P(x, f(x))\}, \{Q(x, f(x))\}\}
\end{aligned}$$

La de la segunda hipótesis es

$$\begin{aligned}
& \forall x \forall y (Q(x, y) \rightarrow R(x, y)) \\
\equiv & \forall x \forall y (\neg Q(x, y) \vee R(x, y)) \\
\equiv & \{\{\neg Q(x, y), R(x, y)\}\}
\end{aligned}$$

La de la negación de la conclusión es

$$\begin{aligned}
& \neg \forall x \exists y (P(x, y) \wedge R(x, y)) \\
\equiv & \exists x \forall y \neg (P(x, y) \wedge R(x, y)) \\
\equiv & \exists x \forall y (\neg P(x, y) \vee \neg R(x, y)) \\
\approx & \forall y (\neg P(a, y) \vee \neg R(a, y)) \\
\equiv & \{ \{ \neg P(a, y), \neg R(a, y) \} \}
\end{aligned}$$

La resolución es

1. $\{P(x, f(x))\}$
2. $\{Q(x, f(x))\}$
3. $\{\neg Q(x, y), R(x, y)\}$
4. $\{\neg P(a, y), \neg R(a, y)\}$
5. $\{\neg R(a, f(a))\}$ de 1 y 4 con $[x/a, y/f(a)]$
6. $\{\neg Q(a, f(a))\}$ de 5 y 3 con $[x/a, y/f(a)]$
7. \square de 6 y 2 con $[x/a]$

Por tanto la conclusión es consecuencia de las hipótesis.

Ejercicio 4 [3 puntos] *En el ordenador.*
