

Lógica matemática y fundamentos (2016–17)

Tema 11: Modelos de Herbrand

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 11: Modelos de Herbrand

1. Modelos de Herbrand
2. Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia

Tema 11: Modelos de Herbrand

1. Modelos de Herbrand

Reducción de la LPO básica a proposicional

Universo de Herbrand

Base de Herbrand

Interpretaciones de Herbrand

Modelos de Herbrand

2. Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia

Reducción de la LPO básica a proposicional

- ▶ Observación:
 - ▶ En este tema sólo se consideran lenguajes de primer orden sin igualdad.
- ▶ Reducción de la LPO básica a proposicional
 - ▶ Def.: Una **fórmula básica** es una fórmula sin variables ni cuantificadores.
 - ▶ Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
 1. S es consistente en el sentido de la lógica de primer orden.
 2. S es consistente en el sentido de la lógica proposicional.

Ejemplos de reducción de la LPO básica a proposicional

- ▶ $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c)\}$
es consistente en el sentido de la lógica de primer orden.

- ▶ $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c), \neg P(c)\}$
es inconsistente en el sentido de la lógica de primer orden.

	P^I	$P(a) \vee P(b)$	$\neg P(b) \vee P(c)$	$P(a) \rightarrow P(c)$	$\neg P(c)$
\mathcal{I}_1	\emptyset	0	1	1	1
\mathcal{I}_2	$\{c^I\}$	0	1	1	0
\mathcal{I}_3	$\{b^I\}$	1	0	1	1
\mathcal{I}_4	$\{b^I, c^I\}$	1	1	1	0
\mathcal{I}_5	$\{a^I\}$	1	1	0	1
\mathcal{I}_6	$\{a^I, c^I\}$	1	1	1	0
\mathcal{I}_7	$\{a^I, b^I\}$	1	0	0	1
\mathcal{I}_8	$\{a^I, b^I, c^I\}$	1	1	1	0

Ejemplos de reducción de la LPO básica a proposicional

- ▶ $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c)\}$
es consistente en el sentido proposicional (con modelos $\mathcal{I}_4, \mathcal{I}_6, \mathcal{I}_8$).
- ▶ $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c), \neg P(c)\}$
es inconsistente en el sentido proposicional.

Se consideran los cambios $P(a)/p, P(b)/q, P(c)/r$

	p	q	r	$p \vee q$	$\neg q \vee r$	$p \rightarrow r$	$\neg r$
\mathcal{I}_1	0	0	0	0	1	1	1
\mathcal{I}_2	0	0	1	0	1	1	0
\mathcal{I}_3	0	1	0	1	0	1	1
\mathcal{I}_4	0	1	1	1	1	1	0
\mathcal{I}_5	1	0	0	1	1	0	1
\mathcal{I}_6	1	0	1	1	1	1	0
\mathcal{I}_7	1	1	0	1	0	0	1
\mathcal{I}_8	1	1	1	1	1	1	0

Notación

- ▶ L representa un lenguaje de primer orden sin igualdad.
- ▶ \mathcal{C} es el conjunto de constantes de L .
- ▶ \mathcal{F} es el conjunto de símbolos de función de L .
- ▶ \mathcal{R} es el conjunto de símbolos de relación de L .
- ▶ \mathcal{F}_n es el conjunto de símbolos de función n -aria de L .
- ▶ \mathcal{R}_n es el conjunto de símbolos de relación n -aria de L .
- ▶ f/n indica que f es un símbolo de función n -aria de L .
- ▶ P/n indica que f es un símbolo de relación n -aria de L .

Universo de Herbrand

- ▶ Def.: El **universo de Herbrand** de L es el conjunto de los términos básicos de L . Se representa por $\text{UH}(L)$.
- ▶ Prop.: $\text{UH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} H_i(L)$, donde $H_i(L)$ es el **nivel i** del $\text{UH}(L)$ definido por

$$H_0(L) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{si } \mathcal{C} \neq \emptyset; \\ \{a\}, & \text{en caso contrario. (} a \text{ es una nueva constante).} \end{cases}$$

$$H_{i+1}(L) = H_i(L) \cup \{f(t_1, \dots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in H_i(L)\}$$

- ▶ Prop.: $\text{UH}(L)$ es finito syss L no tiene símbolos de función.

Ejemplos de universo de Herbrand

- ▶ Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{F} = \emptyset$, entonces

$$H_0(L) = \{a, b, c\}$$

$$H_1(L) = \{a, b, c\}$$

$$\vdots$$

$$UH(L) = \{a, b, c\}$$

- ▶ Si $\mathcal{C} = \emptyset$ y $\mathcal{F} = \{f/1\}$, entonces

$$H_0(L) = \{a\}$$

$$H_1(L) = \{a, f(a)\}$$

$$H_2(L) = \{a, f(a), f(f(a))\}$$

$$\vdots$$

$$UH(L) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\}$$

Ejemplos de universo de Herbrand

- ▶ Si $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/1, g/1\}$, entonces

$$H_0(L) = \{a, b\}$$

$$H_1(L) = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\}$$

$$H_2(L) = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)), g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b))\}$$

⋮

- ▶ Si $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/2\}$, entonces

$$H_0(L) = \{a, b\}$$

$$H_1(L) = \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b)\}$$

$$H_2(L) = \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b), f(a, f(a, a)), f(a, f(a, b)), \dots\}$$

⋮

Base de Herbrand

- ▶ Def.: La **base de Herbrand** de L es el conjunto de los átomos básicos de L . Se representa por $BH(L)$.
- ▶ Prop.: $BH(L) = \{P(t_1, \dots, t_n) : P \in \mathcal{R}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in UH(L)\}$.
- ▶ Prop.: $BH(L)$ es finita syss L no tiene símbolos de función.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{R} = \{P/1\}$, entonces

$$UH(L) = \{a, b, c\}$$

$$BH(L) = \{P(a), P(b), P(c)\}$$
 - ▶ Si $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{F} = \{f/1\}$ y $\mathcal{R} = \{P/1, Q/1, R/1\}$, entonces

$$UH(L) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\}$$

$$BH(L) = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\}$$

Interpretaciones de Herbrand

- ▶ Def.: Una **interpretación de Herbrand** es una interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que
 - ▶ U es el universo de Herbrand de L ;
 - ▶ $I(c) = c$, para cada constante c de L ;
 - ▶ $I(f) = f$, para cada símbolo de función f de L .
- ▶ Prop.: Sea \mathcal{I} una interpretación de Herbrand de L . Si t es un término básico de L , entonces $\mathcal{I}(t) = t$.
- ▶ Prop.: Una interpretación de Herbrand queda determinada por un subconjunto de la base de Herbrand, el conjunto de átomos básicos verdaderos en esa interpretación.

Modelos de Herbrand

- ▶ Nota: Las definiciones de universo de Herbrand, base de Herbrand e interpretación de Herbrand definidas para un lenguaje se extienden a fórmulas y conjuntos de fórmulas considerando el lenguaje formado por los símbolos no lógicos que aparecen.
- ▶ Def.: Un **modelo de Herbrand de una fórmula** F es una interpretación de Herbrand de F que es modelo de F .
- ▶ Def.: Un **modelo de Herbrand de un conjunto de fórmulas** S es una interpretación de Herbrand de S que es modelo de S .
- ▶ Ejemplo: Los modelos de Herbrand de $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c)\}$ son $\{P(b), P(c)\}$, $\{P(a), P(c)\}$ y $\{P(a), P(b), P(c)\}$ (ver página 5).
- ▶ Ejemplo: Sea $S = \{\forall x \forall y [Q(b, x) \rightarrow P(a) \vee R(y)], P(b) \rightarrow \neg \exists z \exists u Q(z, u)\}$.
Entonces,

$$\text{UH}(S) = \{a, b\}$$

$$\text{BH}(S) = \{P(a), P(b), Q(a, a), Q(a, b), Q(b, a), Q(b, b), R(a), R(b)\}$$
 Un modelo de Herbrand de S es $\{P(a)\}$.

Tema 11: Modelos de Herbrand

1. Modelos de Herbrand

2. Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia

Interpretación de Herbrand de una interpretación

Consistencia mediante modelos de Herbrand

Extensiones de Herbrand

Teorema de Herbrand

Semidecisión mediante el teorema de Herbrand

Interpretación de Herbrand de una interpretación

Sea $S = \{\{\neg Q(b, x), P(a), R(y)\}, \{\neg P(b), \neg Q(z, u)\}\}$ e $\mathcal{I} = (\{1, 2\}, I)$ con $a^I = 1$, $b^I = 2$, $P^I = \{1\}$, $Q^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $R^I = \{2\}$. Entonces, $\mathcal{I} \models S$.

Cálculo de la interpretación de Herbrand \mathcal{I}^* correspondiente a \mathcal{I} :

$$\mathcal{I}^* = (\text{UH}(S), I^*)$$

$$\text{UH}(S) = \{a, b\}$$

$$\text{BH}(S) = \{P(a), P(b), Q(a, a), Q(a, b), Q(b, a), Q(b, b), R(a), R(b)\}$$

$$I^*(P(a)) = P^I(a^I) = P^I(1) = \text{V}$$

$$I^*(P(b)) = P^I(b^I) = P^I(2) = \text{F}$$

$$I^*(Q(a, a)) = Q^I(a^I, a^I) = Q^I(1, 1) = \text{V}$$

$$I^*(Q(a, b)) = Q^I(a^I, b^I) = Q^I(1, 2) = \text{F}$$

$$I^*(Q(b, a)) = Q^I(b^I, a^I) = Q^I(2, 1) = \text{F}$$

$$I^*(Q(b, b)) = Q^I(b^I, b^I) = Q^I(2, 2) = \text{V}$$

$$I^*(R(a)) = R^I(a^I) = R^I(1) = \text{F}$$

$$I^*(R(b)) = R^I(b^I) = R^I(2) = \text{V}$$

$$I^* = \{P(a), Q(a, a), Q(b, b), R(b)\} \text{ y } \mathcal{I}^* \models S.$$

Interpretación de Herbrand de una interpretación

Sea S el conjunto de cláusulas $\{\{P(a)\}, \{Q(y, f(a))\}\}$ e $\mathcal{I} = (\{1, 2\}, I)$ con $a^I = 1$, $f^I = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $P^I = \{1\}$, $Q^I = \{(1, 2), (2, 2)\}$. Entonces, $\mathcal{I} \models S$.

Cálculo de la interpretación de Herbrand \mathcal{I}^* correspondiente a \mathcal{I} :

$$\mathcal{I}^* = (\text{UH}(S), I^*)$$

$$\text{UH}(S) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{BH}(S) = \{P(f^n(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^m(a)) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$I^*(P(a)) = P^I(a^I) = P^I(1) = V$$

$$I^*(P(f(a))) = P^I(f^I(a^I)) = P^I(f^I(1)) = P^I(2) = F$$

$$I^*(P(f(f(a)))) = P^I(f^I(f^I(a^I))) = P^I(1) = V$$

$$I^*(P(f^n(a))) = \begin{cases} V, & \text{si } n \text{ es par;} \\ F, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$I^*(Q(f^n(a), f^m(a))) = \begin{cases} V, & \text{si } m \text{ es impar;} \\ F, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$I^* = \{P(f^{2n}(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^{2m+1}(a)) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{I}^* \models S.$$

Consistencia mediante modelos de Herbrand

- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
 1. S es consistente.
 2. S tiene un modelo de Herbrand.
- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Si \mathcal{I}^* es una interpretación de Herbrand correspondiente a un modelo \mathcal{I} de S , entonces \mathcal{I}^* es un modelo de S .
- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
 1. S es consistente.
 2. S tiene un modelo de Herbrand.
- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
 1. S es inconsistente.
 2. S no tiene ningún modelo de Herbrand.
- ▶ Prop.: Existen conjuntos de fórmulas consistentes sin modelos de Herbrand.

Ejemplo de conjunto consistente sin modelos de Herbrand

- ▶ Sea $S = \{\exists x P(x), \neg P(a)\}$. Entonces,

- ▶ S es consistente.

$\mathcal{I} \models S$ con $\mathcal{I} = (\{1, 2\}, I)$, $a^I = 1$ y $P^I = \{2\}$.

- ▶ S no tiene modelos de Herbrand

$$\text{UH}(S) = \{a\}$$

$$\text{BH}(S) = \{P(a)\}$$

Las interpretaciones de Herbrand de S son \emptyset y $\{P(a)\}$.

$$\emptyset \not\models S$$

$$\{P(a)\} \not\models S$$

- ▶ Una forma clausal de S es $S' = \{P(b), \neg P(a)\}$.

- ▶ Un modelo de Herbrand de S' es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$ y $P^I = \{b\}$.

Instancias básicas de una cláusula

- ▶ Def.: Una **sustitución** σ (de L) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \rightarrow \text{Térm}(L)$.
- ▶ Def.: Sea $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ una cláusula de L y σ una sustitución de L . Entonces, $C\sigma = \{L_1\sigma, \dots, L_n\sigma\}$ es una **instancia** de C .
- ▶ Ejemplo: Sea $C = \{P(x, a), \neg P(x, f(y))\}$.
 $C[x/a, y/f(a)] = \{P(f(a), a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$
- ▶ Def.: $C\sigma$ es una **instancia básica** de C si todos los literales de $C\sigma$ son básicos.
- ▶ Ejemplo: Sea $C = \{P(x, a), \neg P(x, f(y))\}$.

$\{P(f(a), a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$	es una instancia básica de C .
$\{P(f(a), a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$	no es una instancia básica de C .
$\{P(x, a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$	no es una instancia básica de C .

Extensiones de Herbrand

- ▶ Def.: La **extensión de Herbrand** de un conjunto de cláusulas S es el conjunto de fórmulas

$$EH(S) = \{C\sigma : C \in S \text{ y,} \\ \text{para toda variable } x \text{ en } C, \sigma(x) \in UH(S)\}$$

- ▶ Prop.: $EH(L) = \bigcup_{i \geq 0} EH_i(L)$, donde $EH_i(L)$ es el nivel i de la $EH(L)$

$$EH_i(S) = \{C\sigma : C \in S \text{ y,} \\ \text{para toda variable } x \text{ en } C, \sigma(x) \in UH_i(S)\}$$

- ▶ Ejemplos:

- ▶ Sea $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$. Entonces,

$$EH_0(S) = \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\}$$

$$EH_1(S) = EH_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$$

$$EH_2(S) = EH_1(S) \cup \{\{P(f(f(a)))\}, \{\neg P(f(f(f(a))))\}\}$$

- ▶ Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$. Entonces,

$$EH(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}.$$

- ▶ Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

Entonces,

$$EH(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}.$$

Teorema de Herbrand

- ▶ **Teorema de Herbrand:** Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
 1. S es consistente.
 2. $\text{EH}(S)$ es consistente (en el sentido proposicional).
- ▶ **Prop.:** Sea S un conjunto de cláusulas. Entonces, son equivalentes
 1. S es inconsistente.
 2. $\text{EH}(S)$ tiene un subconjunto finito inconsistente (en el sentido proposicional).
 3. Para algún i , $\text{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional).

Semidecisión mediante el teorema de Herbrand

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S .

Salida: *Inconsistente*, si S es inconsistente.

$i := 0$

bucle

si $\text{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional) **entonces**
 Devolver *Inconsistente* y terminar

en caso contrario

$i := i + 1$

fsi

fbucle

Ejemplos de decisión mediante el teorema de Herbrand

- $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ (p. 20) es inconsistente.

$\text{EH}_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}$ es inconsistente.

1 $\{\neg P(a), Q(a)\}$

2 $\{P(a)\}$

3 $\{\neg Q(a)\}$

4 $\{Q(a)\}$ Res 1, 2

5 \square Res 3, 4

- $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.

$\text{EH}_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

1 $\{\neg P(a), Q(a)\}$

2 $\{\neg Q(a), R(a)\}$

3 $\{P(a)\}$

4 $\{\neg R(a)\}$

5 $\{Q(a)\}$ Res 1, 3

6 $\{R(a)\}$ Res 5, 2

7 \square Res 6, 4

Ejemplos de decisión mediante el teorema de Herbrand

- ▶ $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ es inconsistente (p. 20).
 - $\text{EH}_0(S) = \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\}$ es consistente
 - $\mathcal{I} = \{P(a)\} \models \text{EH}_0(S)$
 - $\text{EH}_1(S) = \text{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$ es inconsistente.
 - 1 $\{P(f(a))\}$
 - 2 $\{\neg P(f(a))\}$
 - 3 \square Res 1, 2
- ▶ $S = \{\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(y, z)\}\}$ es inconsistente.
 - Dem.:
 - $S' = \{\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}\}$
 - $\subset \text{EH}(S)$
 - es inconsistente.
 - 1 $\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\}$
 - 2 $\{P(g(b))\}$
 - 3 $\{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}$
 - 4 $\{Q(f(g(b)), g(b))\}$ Res 1, 2
 - 5 \square Res 3, 3

- └ Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia
- └ Semidecisión mediante el teorema de Herbrand

Bibliografía

1. M.L. Bonet *Apuntes de LPO*. (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 31–34.
2. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 51–62.
3. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 59–74.
4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 160–169.
5. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 47–50.
6. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 70–78.