

Lógica matemática y fundamentos (2016–17)

Tema 5: Resolución proposicional

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 5: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución

Tema 5: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas

Sintaxis de la lógica clausal

Semántica de la lógica clausal

Equivalencias entre cláusulas y fórmulas

Modelos, consistencia y consecuencia entre cláusulas

Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

2. Demostraciones por resolución

3. Algoritmos de resolución

4. Refinamientos de resolución

5. Argumentación por resolución

Sintaxis de la lógica clausal

- ▶ Un **átomo** es una variable proposicional.
Variables sobre átomos: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$
- ▶ Un **literal** es un átomo (p) o la negación de un átomo ($\neg p$).
Variables sobre literales: L, L_1, L_2, \dots
- ▶ Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.
Variables sobre cláusulas: C, C_1, C_2, \dots
- ▶ La **cláusula vacía** es el conjunto vacío de literales.
La cláusula vacía se representa por \square .
- ▶ **Conjuntos finitos de cláusulas**.
Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: S, S_1, S_2, \dots

Semántica de la lógica clausal

- ▶ Una **interpretación** es una aplicación $I : VP \rightarrow \mathbb{B}$.
- ▶ El **valor de un literal positivo** p en una interpretación I es $I(p)$.
- ▶ El **valor de un literal negativo** $\neg p$ en una interpretación I es

$$I(\neg p) = \begin{cases} 1, & \text{si } I(p) = 0; \\ 0, & \text{si } I(p) = 1. \end{cases}$$

- ▶ El **valor de una cláusula** C en una interpretación I es

$$I(C) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } L \in C \text{ tal que } I(L) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- ▶ El **valor de un conjunto de cláusulas** S en una interpretación I es

$$I(S) = \begin{cases} 1, & \text{si para toda } C \in S, I(C) = 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- ▶ Prop.: En cualquier interpretación I , $I(\square) = 0$.

Cláusulas y fórmulas

- ▶ Equivalencias entre cláusulas y fórmulas
 - ▶ Def.: Una cláusula C y una fórmula F son **equivalentes** si $I(C) = I(F)$ para cualquier interpretación I .
 - ▶ Def.: Un conjunto de cláusulas S y una fórmula F son **equivalentes** si $I(S) = I(F)$ para cualquier interpretación I .
 - ▶ Def.: Un conjunto de cláusulas S y un conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son **equivalentes** si, para cualquier interpretación I , $I(S) = 1$ syss I es un modelo de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
- ▶ De cláusulas a fórmulas
 - ▶ Prop.: La cláusula $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ es equivalente a la fórmula $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$.
 - ▶ Prop.: El conjunto de cláusulas $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ es equivalente a la fórmula $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$.

De fórmulas a cláusulas (forma clausal)

- ▶ Def.: Una **forma clausal** de una fórmula F es un conjunto de cláusulas equivalente a F .
- ▶ Prop.: Si $(L_{1,1} \vee \cdots \vee L_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (L_{m,1} \vee \cdots \vee L_{m,n_m})$ es una forma normal conjuntiva de la fórmula F . Entonces, una forma clausal de F es

$$\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}.$$
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Una forma clausal de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $\{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}\}$.
 - ▶ Una forma clausal de $p \rightarrow q$ es $\{\{\neg p, q\}\}$.
 - ▶ El conjunto $\{\{\neg p, q\}, \{r\}\}$ es una forma clausal de las fórmulas $(p \rightarrow q) \wedge r$ y $\neg\neg r \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$.
- ▶ Def.: Una **forma clausal** de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equivalente a S .
- ▶ Prop.: Si S_1, \dots, S_n son formas clausales de F_1, \dots, F_n , entonces $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.

Modelos, consistencia y consecuencia entre cláusulas

- ▶ Def.: Una interpretación I es **modelo** de un conjunto de cláusulas S si $I(S) = 1$.
- ▶ Ej.: La interpretación I tal que $I(p) = I(q) = 1$ es un modelo de $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.
- ▶ Def.: Un conjunto de cláusulas es **consistente** si tiene modelos e **inconsistente**, en caso contrario.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$ es consistente.
 - ▶ $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ es inconsistente.
- ▶ Prop.: Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
- ▶ Def.: $S \models C$ si para todo modelo I de S , $I(C) = 1$.

Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

- ▶ Prop: Sean S_1, \dots, S_n formas clausales de las fórmulas F_1, \dots, F_n .
 - ▶ $\{F_1, \dots, F_n\}$ es consistente syss $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es consistente.
 - ▶ Si S es una forma clausal de $\neg G$, entonces son equivalentes
 1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
 2. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente.
 3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
- ▶ Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$ syss $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}\}$ es inconsistente.

Tema 5: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
 - Regla de resolución proposicional
 - Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución

Regla de resolución

- ▶ Reglas habituales:

$$\text{Modus Ponens: } \frac{p \rightarrow q, \quad p}{q}$$

$$\frac{\{\neg p, q\}, \quad \{p\}}{\{q\}}$$

$$\text{Modus Tollens: } \frac{p \rightarrow q, \quad \neg q}{\neg p}$$

$$\frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}}$$

$$\text{Encadenamiento: } \frac{p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

$$\frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q, r\}}{\{\neg p, r\}}$$

- ▶ Regla de resolución proposicional:

$$\frac{\{p_1, \dots, r, \dots, p_m\}, \quad \{q_1, \dots, \neg r, \dots, q_n\}}{\{p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n\}}$$

Regla de resolución

- ▶ Def.: Sean C_1 una cláusula, L un literal de C_1 y C_2 una cláusula que contiene el complementario de L . La **resolvente de C_1 y C_2 respecto de L** es

$$\text{Res}_L(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$$

- ▶ Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{Res}_q(\{p, q\}, \{\neg q, r\}) &= \{p, r\} \\ \text{Res}_q(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) &= \{p, \neg p\} \\ \text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) &= \{q, \neg q\} \\ \text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{q, p\}) &= \{q\} \\ \text{Res}_p(\{p\}, \{\neg p\}) &= \square \end{aligned}$$
- ▶ Def.: $\text{Res}(C_1, C_2)$ es el conjunto de las resolventes entre C_1 y C_2
- ▶ Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}) &= \{\{p, \neg p\}, \{q, \neg q\}\} \\ \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, q\}) &= \{\{q\}\} \\ \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{q, r\}) &= \emptyset \end{aligned}$$
- ▶ Nota: $\square \notin \text{Res}(\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\})$

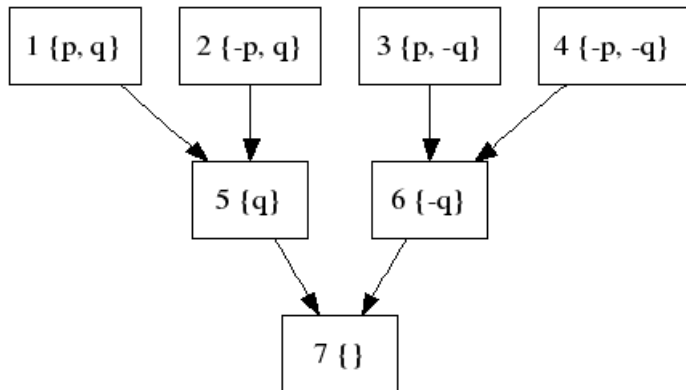
Ejemplo de refutación por resolución

- Refutación de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	□	Resolvente de 5 y 6

Ejemplo de grafo de refutación por resolución

- Grafo de refutación de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:



Demostraciones por resolución entre cláusulas

Sea S un conjunto de cláusulas.

- ▶ La sucesión (C_1, \dots, C_n) es una **demostración por resolución** de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
 - ▶ $C_i \in S$;
 - ▶ existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
- ▶ La cláusula C es **demostrable por resolución** a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S . Se representa por $S \vdash_{Res} C$
- ▶ Una **refutación por resolución** de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S .
- ▶ Se dice que S es **refutable por resolución** si existe una refutación por resolución a partir de S . Se representa por $S \vdash_{Res} \square$

Demostraciones por resolución entre fórmulas

- ▶ Def.: Sean

S_1, \dots, S_n formas clausales de las fórmulas F_1, \dots, F_n y

S una forma clausal de $\neg F$

Una **demostración por resolución** de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.

- ▶ Def.: La fórmula F es **demostrable por resolución** a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$. Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.
- ▶ Ejemplo: $\{p \vee q, p \leftrightarrow q\} \vdash_{Res} p \wedge q$

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	\square	Resolvente de 5 y 6

Adecuación y completitud de la resolución

- ▶ Prop.: Si C es una resolvente de C_1 y C_2 , entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
- ▶ Prop.: Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
 - ▶ (Adecuación) Si $S \vdash_{Res} \square$, entonces S es inconsistente.
 - ▶ (Completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{Res} \square$.
- ▶ Prop.: Sean S un conjunto de fórmulas y F es una fórmula.
 - ▶ (Adecuación) Si $S \vdash_{Res} F$, entonces $S \models F$.
 - ▶ (Completitud) Si $S \models F$, entonces $S \vdash_{Res} F$.
- ▶ Nota: Sean C_1 y C_2 las cláusulas $\{p\}$ y $\{p, q\}$, respectivamente. Entonces,
 - ▶ $\{C_1\} \models C_2$.
 - ▶ C_2 no es demostrable por resolución a partir de $\{C_1\}$.
 - ▶ La fórmula de forma clausal C_1 es $F_1 = p$.
 - ▶ La fórmula de forma clausal C_2 es $F_2 = p \vee q$.
 - ▶ $\{F_1\} \vdash_{Res} F_2$.

Tema 5: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
 - Algoritmo de resolución por saturación
 - Algoritmo de saturación con simplificación
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución

Algoritmo de de resolución por saturación

- ▶ Def.: Sea S un conjunto de cláusulas.
 $Res(S) = S \cup (\cup \{Res(C_1, C_2) : C_1, C_2 \in S\})$.
- ▶ Algoritmo de resolución por saturación

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S .

Salida: *Consistente*, si S es consistente;
Inconsistente, en caso contrario.

$S' := \emptyset$

mientras ($\square \notin S$) y ($S \neq S'$) **hacer**

$S' := S$

$S := Res(S)$

fmientras

si ($\square \in S$) **entonces**

 Devolver *Inconsistente*

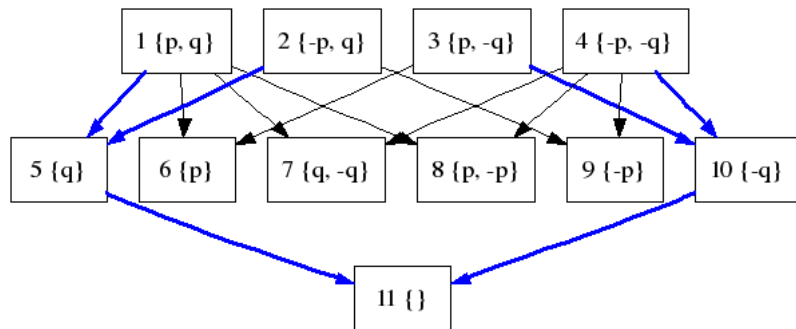
en caso contrario

 Devolver *Consistente*

fsi

- ▶ Prop.: El algoritmo de resolución por saturación es correcto.

Ejemplo de grafo de resolución por saturación

Grafo de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:

Traza:

Paso	S	S'
0	{1, 2, 3, 4}	\emptyset
1	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	{1, 2, 3, 4}
2	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Algoritmo de saturación con simplificación

- ▶ Prop.: Si $S_1 \subseteq S_2$ y S_2 es consistente, entonces S_1 es consistente.
- ▶ Prop.: Una cláusula es una tautología syss contiene un literal y su complementario.
- ▶ Prop.: Sea $C \in S$ una tautología.
Entonces S es consistente syss $S \setminus \{C\}$ es consistente.
- ▶ Def.: La cláusula C **subsume** a la cláusula D si $C \subset D$ (es decir, $C \subseteq D$ y $C \neq D$).
- ▶ Prop.: Si C subsume a D , entonces $C \models D$.
- ▶ Prop.: Sean $C, D \in S$ tales que C subsume a D .
Entonces S es consistente syss $S \setminus \{D\}$ es consistente.
- ▶ Def.: El **simplificado** de un conjunto finito de cláusulas S es el conjunto obtenido de S suprimiendo las tautologías y las cláusulas subsumidas por otras; es decir,

$$\text{Simp}(S) = S - \{C \in S : (C \text{ es una tautología}) \text{ ó } \\ \text{(existe } D \in S \text{ tal que } D \subset C)\}$$

Algoritmo de saturación con simplificación

- ▶ Algoritmo de resolución por saturación con simplificación:

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S .

Salida: *Consistente*, si S es consistente;
Inconsistente, en caso contrario.

$S' := \emptyset$

mientras ($\square \notin S$) y ($S \neq S'$) **hacer**

$S' := S$

$S := \text{Simp}(\text{Res}(S))$

fmientras

si ($\square \in S$) **entonces**

Devolver *Inconsistente*

en caso contrario

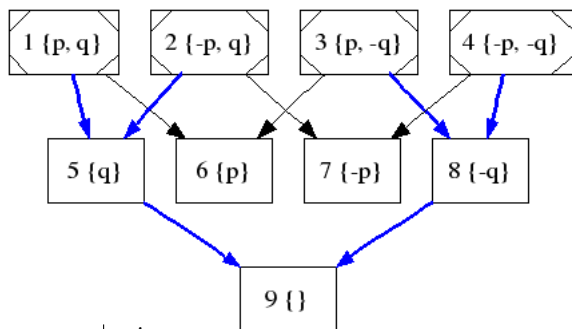
Devolver *Consistente*

fsi

- ▶ Prop.: El algoritmo de resolución por saturación con simplificación es correcto.

Grafo de resolución por saturación con simplificación

Resolución de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:

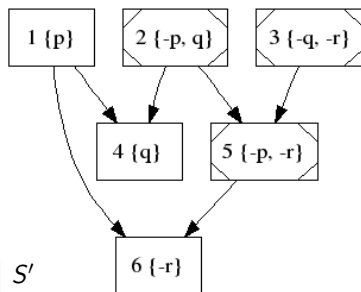


Traza:

Paso	S	S'
0	{1, 2, 3, 4}	\emptyset
1	{5, 6, 7, 8}	{1, 2, 3, 4}
2	{9}	{5, 6, 7, 8}

Grafo de resolución por saturación con simplificación

Resolución de $\{\{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, \neg r\}\}$:



Traza:

Paso	S	S'
0	$\{1, 2, 3\}$	\emptyset
1	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3\}$
2	$\{1, 4, 6\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$
3	$\{1, 4, 6\}$	$\{1, 4, 5, 6\}$

Modelo: $I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 0$.

Tema 5: Resolución proposicional

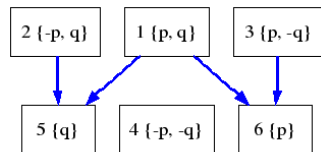
1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
 - Resolución positiva
 - Resolución negativa
 - Resolución unitaria
 - Resolución por entradas
 - Resolución lineal

Resolución positiva

- ▶ Def.: Un **literal positivo** es un átomo.
- ▶ Def.: Una **cláusula positiva** es un conjunto de literales positivos.
- ▶ Def.: Una **demostración por resolución positiva** es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula positiva.
- ▶ La cláusula C es **demostrable por resolución positiva** a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración por resolución positiva de C a partir de S . Se representa por $S \vdash_{ResPos} C$.
- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
 - ▶ (**Adecuación**) Si $S \vdash_{ResPos} \square$, entonces S es inconsistente.
 - ▶ (**Completitud**) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{ResPos} \square$.

Grafo de resolución positiva

Grafo de $\{\{p, a\}, \{\neg p, a\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:



Traza:

<i>P</i>	<i>S</i>	<i>S'</i>
0	$\{1, 2, 3, 4\}$	\emptyset
1	$\{4, 5, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
2	$\{5, 6, 7, 8\}$	$\{4, 5, 6\}$
3	$\{9\}$	$\{5, 6, 7, 8\}$

Resolución negativa

- ▶ Def.: Un **literal negativo** es la negación de un átomo.
- ▶ Def.: Una **cláusula negativa** es un conjunto de literales negativos.
- ▶ Def.: Una **demostración por resolución negativa** es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula negativa.
- ▶ La cláusula C es **demostrable por resolución negativa** a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración negativa por resolución de C a partir de S . Se representa por $S \vdash_{ResNeg} C$.
- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
 - ▶ (**Adecuación**) Si $S \vdash_{ResNeg} \square$, entonces S es inconsistente.
 - ▶ (**Completitud**) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{ResNeg} \square$.

Resolución unitaria

- ▶ Def.: Una **cláusula unitaria** es un conjunto formado por un único literal.
- ▶ Def.: Una **demostración por resolución unitaria** es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula unitaria.
- ▶ La cláusula C es **demostrable por resolución unitaria** a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración por resolución unitaria de C a partir de S . Se representa por $S \vdash_{ResUni} C$.
- ▶ Prop.: (**Adecuación**) Sea S un conjunto de cláusulas. Si $S \vdash_{ResUni} \square$, entonces S es inconsistente.

Resolución unitaria

- ▶ Existen conjuntos de cláusulas S tales que S es inconsistente y $S \not\vdash_{ResUni} \square$.

$$\text{Dem.: } S = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$$

- ▶ Def.: Una **cláusula de Horn** es un conjunto de literales con un literal positivo como máximo.
- ▶ Ejemplos: $\{p, \neg q, \neg r\}$, $\{p\}$ y $\{\neg p, \neg q\}$ son cláusulas de Horn.
 $\{p, q, \neg r\}$ y $\{p, r\}$ no son cláusulas de Horn.
- ▶ Prop.: Si S es un conjunto inconsistente de cláusulas de Horn, entonces $S \vdash_{ResUni} \square$.

Resolución por entradas

- ▶ Def.: Una **demostración por resolución por entradas** a partir de S es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula de S .
- ▶ La cláusula C es **demostrable por resolución por entradas** a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración por resolución por entradas de C a partir de S . Se representa por $S \vdash_{ResEnt} C$.
- ▶ Prop.: (**Adecuación**) Sea S un conjunto de cláusulas. Si $S \vdash_{ResEnt} \square$, entonces S es inconsistente.
- ▶ Existen conjuntos de cláusulas S tales que S es inconsistente y $S \not\vdash_{ResEnt} \square$.
 Dem.: $S = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$
- ▶ Prop.: Si S es un conjunto inconsistente de cláusulas de Horn, entonces $S \vdash_{ResEnt} \square$.

Resolución lineal

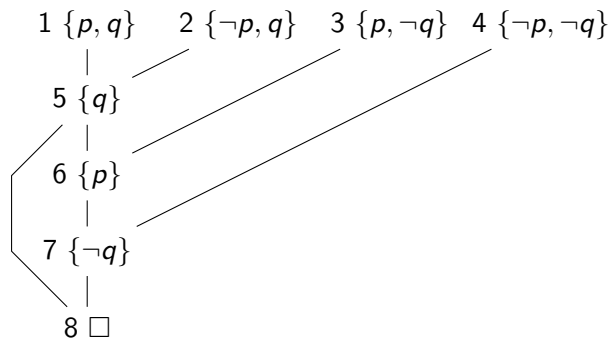
- ▶ Sea S un conjunto de cláusulas.
 - ▶ La sucesión (C_0, C_1, \dots, C_n) es una **resolución lineal** a partir de S si se cumplen las siguientes condiciones:
 1. $C_0 \in S$;
 2. para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, existe un $B \in S \cup \{C_0, \dots, C_{i-1}\}$ tal que $C_i \in \text{Res}(C_{i-1}, B)$.

La cláusula C_0 se llama **cláusula base**, las C_i se llaman **cláusulas centrales** y las B se llaman **cláusulas laterales**.
 - ▶ La cláusula C es **deducible por resolución lineal** a partir de S si existe una deducción por resolución lineal a partir de S , (C_0, \dots, C_n) , tal que $C_n = C$. Se representa por $S \vdash_{\text{ResLin}} C$.
- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
 - ▶ (**Adecuación**) Si $S \vdash_{\text{ResLin}} \square$, entonces S es inconsistente.
 - ▶ (**Completitud**) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{\text{ResLin}} \square$.

Resolución lineal

- Ejemplo: Resolución lineal de

$\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$



Tema 5: Resolución proposicional

1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
5. Argumentación por resolución
 - Formalización de argumentación por resolución
 - Decisión de argumentación por resolución

Formalización de argumentación por resolución

► Problema de los animales: Se sabe que

1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras.

Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

► Formalización:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tiene_pelos} \vee \text{da_leche} \rightarrow \text{es_mamífero}, \\ \text{es_mamífero} \wedge (\text{tiene_pezuñas} \vee \text{rumia}) \rightarrow \text{es_ungulado}, \\ \text{es_ungulado} \wedge \text{tiene_cuello_largo} \rightarrow \text{es_jirafa}, \\ \text{es_ungulado} \wedge \text{tiene_rayas_negras} \rightarrow \text{es_cebra}, \\ \text{tiene_pelos} \wedge \text{tiene_pezuñas} \wedge \text{tiene_rayas_negras} \end{array} \right\}$$

$$\vdash_{Res} \text{es_cebra}$$

Decisión de argumentación por resolución

1	$\{\neg \text{tiene_pelos}, \text{es_mamífero}\}$	Hipótesis
2	$\{\neg \text{da_leche}, \text{es_mamífero}\}$	Hipótesis
3	$\{\neg \text{es_mamífero}, \neg \text{tiene_pezuñas}, \text{es_ungulado}\}$	Hipótesis
4	$\{\neg \text{es_mamífero}, \neg \text{rumia}, \text{es_ungulado}\}$	Hipótesis
5	$\{\neg \text{es_ungulado}, \neg \text{tiene_cuello_largo}, \text{es_jirafa}\}$	Hipótesis
6	$\{\neg \text{es_ungulado}, \neg \text{tiene_rayas_negras}, \text{es_cebra}\}$	Hipótesis
7	$\{\text{tiene_pelos}\}$	Hipótesis
8	$\{\text{tiene_pezuñas}\}$	Hipótesis
9	$\{\text{tiene_rayas_negras}\}$	Hipótesis
10	$\{\neg \text{es_cebra}\}$	Hipótesis
11	$\{\text{es_mamífero}\}$	Resolvente de 1 y 7
12	$\{\neg \text{tiene_pezuñas}, \text{es_ungulado}\}$	Resolvente de 11 y 3
13	$\{\text{es_ungulado}\}$	Resolvente de 12 y 8
14	$\{\neg \text{tiene_rayas_negras}, \text{es_cebra}\}$	Resolvente de 13 y 6
15	$\{\text{es_cebra}\}$	Resolvente de 14 y 9
16	\square	Resolvente de 15 y 10

Bibliografía

1. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.)*. (Springer, 2001).
Cap. 4: Propositional calculus: resolution and BDDs.
2. C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973).
Cap. 5.2: The resolution principle for the propositional logic.
3. N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001).
Cap. 14: La resolución en el cálculo proposicional.
4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003).
Cap. 5.7: El principio de resolución en lógica proposicional.
5. U. Schöning *Logic for Computer Scientists* (Birkäuser, 1989).
Cap. 1.5: Resolution.