Ejercicio 1 *[2 puntos] Sea F la fórmula $(p \to q \land r) \to (\neg p \land r)$*

1. *Decidir por el método de los tableros semánticos si F es una tautología.*
2. *En el caso de que no lo sea, calcular a partir del apartado anterior los contramodelos de F, una forma normal disyuntiva de $\neg F$ y una forma normal conjuntiva de F.*

Solución:

Apartado 1: Para decidir si F es una tautología construimos el tablero semántico de $\neg F$.

1. $\neg((p \to q \land r) \to (\neg p \land r))$
2. $p \to q \land r$ (1)
3. $\neg(\neg p \land r)$ (1)

4. $\neg p$ (2)

6. $\neg\neg p$ (3)
Cerrada (6,4)

7. $\neg r$ (3)
Abierta
$\{\neg p, \neg r\}$

5. $q \land r$ (2)
8. q (5)
9. r (5)

10. $\neg\neg p$ (3)
12. p (10)
Abierta
$\{p, q, r\}$

11. $\neg r$ (3)
Cerrada (11,9)

Como tiene ramas abiertas, F no es una tautología.

Apartado 2: Los contramodelos de F, correspondientes a las ramas abiertas del tablero de $\neg F$ son

	p	q	r
I_1	0	–	0
I_2	1	1	1

Una forma a normal disyuntiva de $\neg F$ es

$$(\neg p \land \neg r) \lor (p \land q \land r)$$

y una forma a normal conjuntiva de F es

$$(p \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$$

Ejercicio 2 *[2 puntos] Decidir, usando resolución, si:*

$$\{\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(x,y)),\ \forall x \forall y (Q(x,y) \to R(x,y))\} \models \forall x \exists y (P(x,y) \land R(x,y))$$

En caso negativo, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar se calcula las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión. La de primera hipótesis es

$$
\begin{array}{rl}
& \forall x \exists y (P(x,y) \land Q(x,y)) \\
\approx & \forall x (P(x,f(x)) \land Q(x,f(x))) \\
\equiv & \{\{P(x,f(x))\},\{Q(x,f(x))\}\}
\end{array}
$$

La de la segunda hipótesis es

$$
\begin{array}{rl}
& \forall x \forall y (Q(x,y) \to R(x,y)) \\
\equiv & \forall x \forall y (\neg Q(x,y) \lor R(x,y)) \\
\equiv & \{\{\neg Q(x,y), R(x,y)\}\}
\end{array}
$$

La de la negación de la conclusión es

$$
\begin{array}{rl}
& \neg \forall x \exists y (P(x,y) \land R(x,y)) \\
\equiv & \exists x \forall y \neg (P(x,y) \land R(x,y)) \\
\equiv & \exists x \forall y (\neg P(x,y) \lor \neg R(x,y)) \\
\approx & \forall y (\neg P(a,y) \lor \neg R(a,y)) \\
\equiv & \{\{\neg P(a,y), \neg R(a,y)\}\}
\end{array}
$$

La resolución es

$$
\begin{array}{rll}
1. & \{P(x,f(x))\} & \\
2. & \{Q(x,f(x))\} & \\
3. & \{\neg Q(x,y), R(x,y)\} & \\
4. & \{\neg P(a,y), \neg R(a,y)\} & \\
5. & \{\neg R(a,f(a)\} & \text{de 1 y 4 con } [x/a, y/f(a)] \\
6. & \{\neg Q(a,f(a)\} & \text{de 5 y 3 con } [x/a, y/f(a)] \\
7. & \square & \text{de 6 y 2 con } [x/a]
\end{array}
$$

Por tanto la conclusión es consecuencia de las hipótesis.

Ejercicio 3 *[2 puntos] Demostrar o refutar razonadamente:*

1. *Si F es consecuencia lógica de S_1 y de S_2, también es consecuencia lógica de $S_1 \cap S_2$.*
2. *Si para todo conjunto S se verifica que $S \models F \Leftrightarrow S \models G$, entonces $F \equiv G$.*

Solución:

Apartado 1. Es falso ya que si $S_1 = \{p\}$, $S_2 = \{q\}$ y $F = p \lor q$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, F es consecuencia lógica de S_1 y de S_2, pero lo es de $S_1 \cap S_2$.

Apartado 2. Es cierto, ya que tomando como S el conjunto $\{F\}$ se tiene que $\{F\} \models F \Leftrightarrow \{F\} \models G$ y, puesto que $\{F\} \models F$ se tiene que $\{F\} \models G$ y, por tanto, $F \models G$.

Análogamente, tomando como S el conjunto $\{G\}$, se tiene $G \models F$.

Por consiguiente, $F \equiv G$.

Ejercicio 4 [2 puntos] En el laboratorio.

Ejercicio 5 [2 puntos] En el laboratorio.