
Ejercicio 1 [2 puntos] *Formalizar las siguiente sentencias utilizando los símbolos indicados:*

1. Los chinos tienen como máximo un hijo.
   (Símbolos: $C(x)$ representa que x es chino y $H(x,y)$ representa que x es hijo de y).
2. Hay exactamente un participante.
   (Símbolos: $P(x)$ representa que x es un participante).
3. Ningún socio del club está en deuda con el tesorero del club.
   (Símbolos: $S(x)$ representa que x es socio del club, $D(x,y)$ representa que x está en deuda con y y a representa al tesorero del club).
4. No hay ningún pez que se coma a todos los peces.
   (Símbolos: $P(x)$ representa que x es un pez y $C(x,y)$ representa que x se come a y).

Solución:

1. *Los chinos tienen como máximo un hijo*
   $\forall x(C(x) \to \forall y \forall z(H(y,x) \land H(z,x) \to y = z))$
2. *Hay exactamente un participante.*
   $\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \to x = y))$.
3. *Ningún socio del club está en deuda con el tesorero del club.*
   $\neg \exists x(S(x) \land D(x,a))$.
4. *No hay ningún pez que se coma a todos los peces.*
   $\neg \exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \to C(x,y)))$.

Ejercicio 2 [2 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Si F es una fórmula satisfacible, entonces todas las subfórmulas de F son satisfacibles.*
2. *Existen tautologías tales que todas sus subfórmulas son tautologías.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es falsa. Un contraejemplo es la fórmula $F := \neg(p \wedge \neg p)$. La fórmula F es satisfacible (de hecho, F es válida) y la subfórmula $p \wedge \neg p$ de F no es satisfacible.

Solución del apartado 2: La proposición es falsa ya que toda fórmula tiene alguna subfórmula atómica y para cada fórmula atómica existe alguna interpretación en la que no se verifica.

Ejercicio 3 [2 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Para toda fórmula F y toda fórmula G, se tiene* $(\exists x)[F \land G] \equiv (\exists x)F \land (\exists x)G$.
2. *Para ninguna fórmula F y ninguna fórmula G, se tiene* $(\exists x)[F \land G] \equiv (\exists x)F \land (\exists x)G$.

Solución:

Apartado 1 Es falso como se observa tomando como F la fórmula $P(x)$ y como G la fórmula $Q(x)$. Entonces $(\exists x)[F \land G] \not\equiv (\exists x)F \land (\exists x)G$ ya que hay interpretaciones en las que se verifica $(\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$ y no se verifica $(\exists x)[P(x) \land Q(x)]$. Por ejemplo, (U, I) con $U = \{0,1\}$, $P^I = \{0\}$ y $Q^I = \{1\}$.

Apartado 2 Es falso como se observa tomando como F y G la misma fórmula. Otro contraejemplo consiste en tomar como F ó G una fórmula en la que no ocurra la variable x.

Ejercicio 4 [2 puntos] *Demostrar, mediante deducción natural,*

$$p \wedge \neg(q \to r) \vdash (p \wedge q) \wedge \neg r$$

Solución:

1	$p \wedge \neg(q \to r)$	premisa
2	p	$\wedge$e 1
3	$\neg q$	supuesto
4	$\neg(q \to r)$	$\wedge$e 1
5	q	supuesto
6	$\neg r$	supuesto
7	$\bot$	$\neg$e $5, 3$
8	r	RAA $6 - 7$
9	$q \to r$	$\to$i $5 - 8$
10	$\bot$	$\neg$e $4, 9$
11	q	RAA $3 - 10$
12	$p \wedge q$	$\wedge$i $2, 11$
13	r	supuesto
14	$\neg(q \to r)$	$\wedge$e 1
15	q	supuesto
16	r	hipotesis 13
17	$q \to r$	$\to$i $15 - 16$
18	$\bot$	$\neg$e $14, 17$
19	$\neg r$	$\neg$i $13 - 18$
20	$(p \wedge q) \wedge \neg r$	$\wedge$i $12, 19$

Ejercicio 5 [3 puntos] *Demostrar, mediante deducción natural,*

$$
\begin{array}{l}
\{(\forall x)[Q(x) \to \neg R(x)], \\
\ (\forall x)[P(x) \to Q(x) \lor S(x)], \\
\ (\exists x)[P(x) \land R(x)]\} \\
\models (\exists x)[P(x) \land S(x)]
\end{array}
$$

Solución:

1	$(\forall x)[Q(x) \to \neg R(x)]$	Supuesto
2	$(\forall x)[P(x) \to Q(x) \lor S(x)]$	Supuesto
3	$(\exists x)[P(x) \land R(x)]$	Supuesto
4	actual i	Supuesto
5	$P(i) \land R(i)$	Supuesto
6	$P(i) \to Q(i) \lor S(i)$	$\forall$e 2
7	$P(i)$	$\land$e 5
8	$Q(i) \lor S(i)$	$\to$e $6, 7$
9	$Q(i)$	Supuesto
10	$Q(i) \to \neg R(i)$	$\forall$e $1, 4$
11	$\neg R(i)$	$\to$e $10, 9$
12	$R(i)$	$\land$e 5
13	$\bot$	$\neg$e $11, 12$
14	$S(i)$	$\bot$e 13
15	$P(i) \land S(i)$	$\land$i $7, 14$
16	$(\exists x)[P(x) \land S(x)]$	$\exists$i $15, 4$
17	$S(i)$	Supuesto
18	$P(i) \land S(i)$	$\land$i $7, 17$
19	$(\exists x)[P(x) \land S(x)]$	$\exists$i $18, 4$
20	$(\exists x)[P(x) \land S(x)]$	$\lor$e $8, 9-16, 17-19$
21	$(\exists x)[P(x) \land S(x)]$	$\exists$e $3, 4-20$