

**Ejercicio 1** [2 puntos] Sea  $S = \{p_0 \leftrightarrow p_1, p_1 \leftrightarrow p_2, \dots, p_{n-1} \leftrightarrow p_n\}$ . Decidir razonablemente cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. La fórmula  $p_0 \wedge p_n$  se puede deducir por resolución a partir de  $S$ .
2. La fórmula  $p_0 \vee p_n$  se puede deducir por tablero semántico a partir de  $S$ .
3. Las dos anteriores.
4. Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

**Apartado 1.** Es falsa, ya que la interpretación  $I$  tal que  $I(p_0) = I(p_1) = \dots = I(p_n) = 0$  es un modelo de  $S$  pero  $I(p_0 \wedge p_n) = 0$ . Por tanto, la fórmula no es consecuencia del conjunto y no se puede deducir.

**Apartado 2.** Es falsa, ya que la interpretación  $I$  tal que  $I(p_0) = I(p_1) = \dots = I(p_n) = 0$  es un modelo de  $S$  pero  $I(p_0 \vee p_n) = 0$ . Por tanto, la fórmula no es consecuencia del conjunto y no se puede deducir.

**Apartado 3.** Es falsa, porque las dos anteriores lo son.

**Apartado 4.** Es verdadera, porque las tres anteriores lo son.

**Ejercicio 2** [1 punto] Sean  $t_1$  y  $t_2$  los términos  $g(x_1, x_2, x_3)$  y  $g(f(x_0, x_0), f(x_1, x_1), f(x_2, x_2))$ . Decidir razonablemente si los términos  $t_1$  y  $t_2$  son unificables y, en el caso de que lo sean, calcular un unificador de máxima generalidad.

**Solución:**

Los términos son

$$\begin{aligned} &g(x_1, x_2, x_3) \\ &g(f(x_0, x_0), f(x_1, x_1), f(x_2, x_2)) \end{aligned}$$

Para unificar los primeros argumentos se aplica la sustitución

$$[x_1 / f(x_0, x_0)]$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} &g(f(x_0, x_0), x_2, x_3) \\ &g(f(x_0, x_0), f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), f(x_2, x_2)) \end{aligned}$$

Para unificar los segundos argumentos se aplica la sustitución

$$[x_2 / f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0))]$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} &g(f(x_0, x_0), f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), x_3) \\ &g(f(x_0, x_0), f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), f(f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)))) \end{aligned}$$

Para unificar los terceros argumentos se aplica la sustitución

$$[x_3 / f(f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)))]$$

y se obtiene

$$g(f(x_0, x_0), f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), f(f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)))) \\ g(f(x_0, x_0), f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), f(f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0))))$$

Por tanto, el unificador es

$$[x_1 / f(x_0, x_0), \\ x_2 / f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), \\ x_3 / f(f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)), f(f(x_0, x_0), f(x_0, x_0)))]$$

**Ejercicio 3** [3 puntos] Sea  $F$  la fórmula  $\exists y \forall x (P(x, y) \wedge \neg R(x) \rightarrow Q(y, x))$ .

1. Calcular el valor de  $F$  en la interpretación  $I$  cuyo universo es  $U = \{1, 2\}$  y la interpretación de las relaciones es  $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$ ,  $I(Q) = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ,  $I(R) = \{1\}$
2. Calcular el universo y la base de Herbrand de  $F$ .
3. ¿Cuántos modelos de Herbrand tiene  $F$ ?

**Solución:**

**Apartado 1.** La evaluación es

$$\begin{array}{cccccccccccc} \exists & y & \forall & x & P(x, y) & \wedge & \neg & R(x) & \rightarrow & Q(y, x) \\ V & 1 & V & 1 & & & F & F & V & 1 & V \\ & & & 2 & F & 1 & 2 & F & & & V \\ 2 & F & 1 & & & & & & & & V & V & 2 & 1 \\ & & & 2 & V & 2 & 2 & V & V & F & 2 & F & F & 1 & 2 \end{array}$$

**Apartado 2.** El universo de Herbrand es  $\{a\}$ . La base de Herbrand es

$$\{P(a, a), Q(a, a), R(a)\}$$

**Apartado 3.** Hay 8 interpretaciones de Hebrand correspondientes a los 8 subconjuntos de la base de Herbrand.

$I_1 = \emptyset$  es modelo ya que  $P(a, a) = F$  y el antecedente del condicional es falso.

Las interpretaciones que contienen a  $Q(a, a)$  son modelos ya que la conclusión es verdadera.

Las interpretaciones que contienen a  $R(a)$  son modelos ya que el antecedente del condicional es falso.

La única interpretación que queda por considerar es  $P(a, a)$  que no modelo

$$\begin{array}{cccccccccccc} \exists & y & \forall & x & P(x, y) & \wedge & \neg & R(x) & \rightarrow & Q(y, x) \\ F & a & F & a & V & a & a & V & V & F & a & F & F & a & a \end{array}$$

En resumen, tien 7 modelos de Herbrand.