Lógica matemática y fundamentos (2017–18)

Tema 5: Resolución proposicional

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 5: Resolución proposicional

Tema 5: Resolución proposicional

Sintaxis de la lógica clausal

- Un átomo es una variable proposicional.
  Variables sobre átomos: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$.
- Un literal es un átomo (p) o la negación de un átomo ($\neg p$).
  Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$.
- Una cláusula es un conjunto finito de literales.
  Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$.
- La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.
  La cláusula vacía se representa por $\square$.
- Conjuntos finitos de cláusulas.
  Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$.

Semántica de la lógica clausal

- Una interpretación es una aplicación $I : \mathrm{VP} \to \mathbb{B}$.
- El valor de un literal positivo p en una interpretación I es $I(p)$.
- El valor de un literal negativo $\neg p$ en una interpretación I es
$$I(\neg p) = \begin{cases} 1, & \text{si } I(p) = 0; \\ 0, & \text{si } I(p) = 1. \end{cases}$$
- El valor de una cláusula C en una interpretación I es
$$I(C) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } L \in C \text{ tal que } I(L) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
- El valor de un conjunto de cláusulas S en una interpretación I es
$$I(S) = \begin{cases} 1, & \text{si para toda } C \in S, I(C) = 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
- Prop.: En cualquier interpretación I, $I(\square) = 0$.

Cláusulas y fórmulas

- Equivalencias entre cláusulas y fórmulas
  - Def.: Una cláusula C y una fórmula F son equivalentes si $I(C) = I(F)$ para cualquier interpretación I.
  - Def.: Un conjunto de cláusulas S y una fórmula F son equivalentes si $I(S) = I(F)$ para cualquier interpretación I.
  - Def.: Un conjunto de cláusulas S y un conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son equivalentes si, para cualquier interpretación I, $I(S) = 1$ syss I es un modelo de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
- De cláusulas a fórmulas
  - Prop.: La cláusula $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ es equivalente a la fórmula $L_1 \lor L_2 \lor \cdots \lor L_n$.
  - Prop.: El conjunto de cláusulas $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ es equivalente a la fórmula $(L_{1,1} \lor \cdots \lor L_{1,n_1}) \land \cdots \land (L_{m,1} \lor \cdots \lor L_{m,n_m})$.

De fórmulas a cláusulas (forma clausal)

- Def.: Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas equivalente a F.
- Prop.: Si $(L_{1,1} \vee \cdots \vee L_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (L_{m,1} \vee \cdots \vee L_{m,n_m})$ es una forma normal conjuntiva de la fórmula F. Entonces, una forma clausal de F es
  $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$.
- Ejemplos:
  - Una forma clausal de $\neg(p \wedge (q \to r))$ es $\{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}\}$.
  - Una forma clausal de $p \to q$ es $\{\{\neg p, q\}\}$.
  - El conjunto $\{\{\neg p, q\}, \{r\}\}$ es una forma clausal de las fórmulas $(p \to q) \wedge r$ y $\neg\neg r \wedge (\neg q \to \neg p)$.
- Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equivalente a S.
- Prop.: Si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.

Modelos, consistencia y consecuencia entre cláusulas

- Def.: Una interpretación I es modelo de un conjunto de cláusulas S si $I(S) = 1$.
- Ej.: La interpretación I tal que $I(p) = I(q) = 1$ es un modelo de $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.
- Def.: Un conjunto de cláusulas es consistente si tiene modelos e inconsistente, en caso contrario.
- Ejemplos:
  - $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$ es consistente.
  - $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ es inconsistente.
- Prop.: Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
- Def.: $S \models C$ si para todo modelo I de S, $I(C) = 1$.

Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

- Prop: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$.
  - $\{F_1, \dots, F_n\}$ es consistente syss $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es consistente.
  - Si S es una forma clausal de $\neg G$, entonces son equivalentes
    1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
    2. $\{F_1, \dots, F_n \neg G\}$ es inconsistente.
    3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$ syss
  $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}\}$ es inconsistente.

Tema 5: Resolución proposicional

Regla de resolución

- Reglas habituales:

Modus Ponens: $\dfrac{p \to q, \quad p}{q}$ $\qquad \dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{p\}}{\{q\}}$

Modus Tollens: $\dfrac{p \to q, \quad \neg q}{\neg p}$ $\qquad \dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}}$

Encadenamiento: $\dfrac{p \to q, \quad q \to r}{p \to r}$ $\qquad \dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q, r\}}{\{\neg p, r\}}$

- Regla de resolución proposicional:

$$\frac{\{p_1, \dots, r, \dots, p_m\}, \quad \{q_1, \dots, \neg r, \dots, q_n\}}{\{p_1, \dots, p_m, q_1, , \dots, q_n\}}$$

Regla de resolución

- Def.: Sean C_1 una cláusula, L un literal de C_1 y C_2 una cláusula que contiene el complementario de L. La resolvente de C_1 y C_2 respecto de L es

$$\text{Res}_L(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$$

- Ejemplos:

$$\begin{array}{ll} \text{Res}_q(\{p, q\}, \{\neg q, r\}) & = \{p, r\} \\ \text{Res}_q(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) & = \{p, \neg p\} \\ \text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) & = \{q, \neg q\} \\ \text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{q, p\}) & = \{q\} \\ \text{Res}_p(\{p\}, \{\neg p\}) & = \square \end{array}$$

- Def.: $\text{Res}(C_1, C_2)$ es el conjunto de las resolventes entre C_1 y C_2
- Ejemplos:

$$\begin{array}{ll} \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}) & = \{\{p, \neg p\}, \{q, \neg q\}\} \\ \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, q\}) & = \{\{q\}\} \\ \text{Res}(\{\neg p, q\}, \{q, r\}) & = \emptyset \end{array}$$

- Nota: $\square \notin \text{Res}(\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\})$

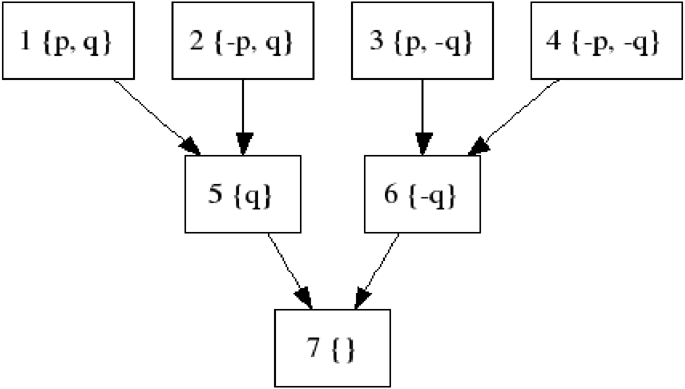
Ejemplo de refutación por resolución

- Refutación de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

Ejemplo de grafo de refutación por resolución

- Grafo de refutación de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:



Demostraciones por resolución entre cláusulas

Sea S un conjunto de cláusulas.

- La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una demostración por resolución de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
  - $C_i \in S$;
  - existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
- La cláusula C es demostrable por resolución a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S. Se representa por $S \vdash_{Res} C$
- Una refutación por resolución de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S.
- Se dice que S es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de S. Se representa por $S \vdash_{Res} \square$

Demostraciones por resolución entre fórmulas

- Def.: Sean
  $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y
  S una forma clausal de $\neg F$
  Una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.
- Def.: La fórmula F es demostrable por resolución a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$. Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.
- Ejemplo: $\{p \lor q, p \leftrightarrow q\} \vdash_{Res} p \land q$

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

Adecuación y completitud de la resolución

- Prop.: Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
- Prop.: Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
  - (Adecuación) Si $S \vdash_{Res} \square$, entonces S es inconsistente.
  - (Completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{Res} \square$.
- Prop.: Sean S un conjunto de fórmulas y F es una fórmula.
  - (Adecuación) Si $S \vdash_{Res} F$, entonces $S \models F$.
  - (Completitud) Si $S \models F$, entonces $S \vdash_{Res} F$.
- Nota: Sean C_1 y C_2 las cláusulas $\{p\}$ y $\{p, q\}$, respectivamente. Entonces,
  - $\{C_1\} \models C_2$.
  - C_2 no es demostrable por resolución a partir de $\{C_1\}$.
  - La fórmula de forma clausal C_1 es $F_1 = p$.
  - La fórmula de forma clausal C_2 es $F_2 = p \lor q$.
  - $\{F_1\} \vdash_{Res} F_2$.

Tema 5: Resolución proposicional

Algoritmo de de resolución por saturación

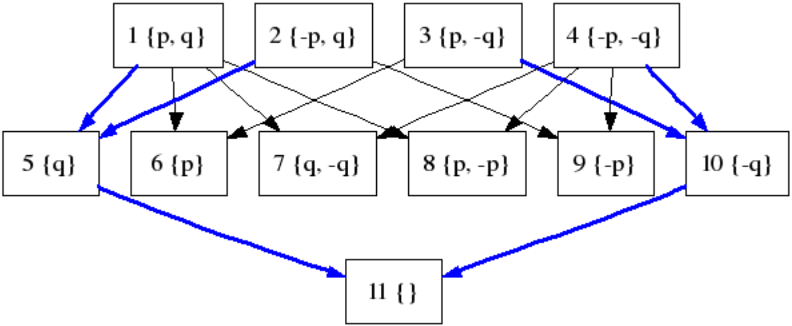
- Def.: Sea S un conjunto de cláusulas.
  $Res(S) = S \cup (\bigcup\{Res(C_1, C_2) : C_1, C_2 \in S\})$.
- Algoritmo de resolución por saturación

  Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.
  Salida: *Consistente*, si S es consistente;
  Inconsistente, en caso contrario.

  $S' := \emptyset$
  mientras $(\square \notin S)$ y $(S \neq S')$ **hacer**
  $S' := S$
  $S := Res(S)$
  fmientras
  si $(\square \in S)$ **entonces**
  Devolver *Inconsistente*
  en caso contrario
  Devolver *Consistente*
  fsi
- Prop.: El algoritmo de resolución por saturación es correcto.

Ejemplo de grafo de resolución por saturación

Grafo de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:



Traza:

Paso	S	S'
0	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\emptyset$
1	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
2	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Algoritmo de saturación con simplificación

- Prop.: Si $S_1 \subseteq S_2$ y S_2 es consistente, entonces S_1 es consistente.
- Prop.: Una cláusula es una tautología syss contiene un literal y su complementario.
- Prop.: Sea $C \in S$ una tautología.
  Entonces S es consistente syss $S \setminus \{C\}$ es consistente.
- Def.: La cláusula C subsume a la cláusula D si $C \subset D$ (es decir, $C \subseteq D$ y $C \neq D$).
- Prop.: Si C subsume a D, entonces $C \models D$.
- Prop.: Sean $C, D \in S$ tales que C subsume a D.
  Entonces S es consistente syss $S \setminus \{D\}$ es consistente.
- Def.: El simplificado de un conjunto finito de cláusulas S es el conjunto obtenido de S suprimiendo las tautologías y las cláusulas subsumidas por otras; es decir,

$$Simp(S) = S - \{C \in S : \begin{array}{l} (C \text{ es una tautología}) \text{ ó} \\ (\text{existe } D \in S \text{ tal que } D \subset C)\} \end{array}$$

Algoritmo de saturación con simplificación

- Algoritmo de resolución por saturación con simplificación:

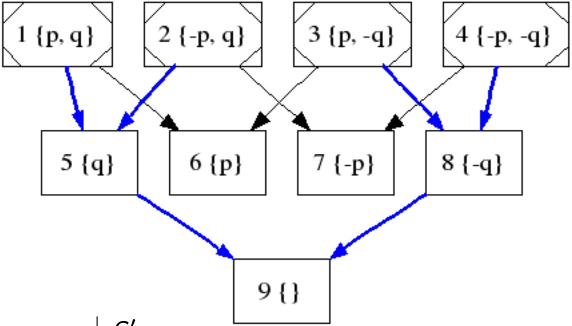
Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S.
Salida: *Consistente*, si S es consistente;
Inconsistente, en caso contrario.

$S' := \emptyset$
mientras $(\Box \notin S)$ y $(S \neq S')$ **hacer**
  $S' := S$
  $S := Simp(Res(S))$
fmientras
si $(\Box \in S)$ **entonces**
  Devolver *Inconsistente*
en caso contrario
  Devolver *Consistente*
fsi

- Prop.: El algoritmo de resolución por saturación con simplificación es correcto.

Grafo de resolución por saturación con simplificación

Resolución de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:

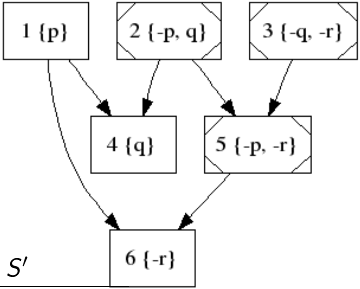


Traza:

Paso	S	S'
0	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\emptyset$
1	$\{5, 6, 7, 8\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
2	$\{9\}$	$\{5, 6, 7, 8\}$

Grafo de resolución por saturación con simplificación

Resolución de $\{\{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, \neg r\}\}$:



Traza:

Paso	S	S'
0	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$
1	$\{1,3,4,5\}$	$\{1,2,3\}$
2	$\{1,4,6\}$	$\{1,3,4,5\}$
3	$\{1,4,6\}$	$\{1,4,5,6\}$

Modelo: $I(p) = 1, I(q) = 1, I(r) = 0$.

Tema 5: Resolución proposicional

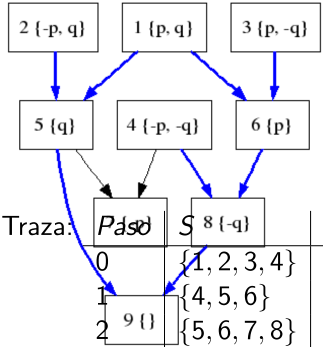
1. Lógica de cláusulas
2. Demostraciones por resolución
3. Algoritmos de resolución
4. Refinamientos de resolución
    - Resolución positiva
    - Resolución negativa
    - Resolución unitaria
    - Resolución por entradas
    - Resolución lineal
5. Argumentación por resolución

Resolución positiva

- Def.: Un literal positivo es un átomo.
- Def.: Una cláusula positiva es un conjunto de literales positivos.
- Def.: Una demostración por resolución positiva es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula positiva.
- La cláusula C es demostrable por resolución positiva a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración por resolución positiva de C a partir de S. Se representa por $S \vdash_{ResPos} C$.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
  - (Adecuación) Si $S \vdash_{ResPos} \square$, entonces S es inconsistente.
  - (Completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{ResPos} \square$.

Grafo de resolución positiva

Grafo de $\{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$:



Traza:

Paso	S	S'
0	$\{1,2,3,4\}$	$\emptyset$
1	$\{4,5,6\}$	$\{1,2,3,4\}$
2	$\{5,6,7,8\}$	$\{4,5,6\}$
3	$\{9\}$	$\{5,6,7,8\}$

Resolución negativa

- Def.: Un literal negativo es la negación de un átomo.
- Def.: Una cláusula negativa es un conjunto de literales negativos.
- Def.: Una demostración por resolución negativa es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula negativa.
- La cláusula C es demostrable por resolución negativa a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración negativa por resolución de C a partir de S. Se representa por $S \vdash_{ResNeg} C$.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
  - (Adecuación) Si $S \vdash_{ResNeg} \square$, entonces S es inconsistente.
  - (Completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{ResNeg} \square$.

Resolución unitaria

- Def.: Una cláusula unitaria es un conjunto formado por un único literal.
- Def.: Una demostración por resolución unitaria es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula unitaria.
- La cláusula C es demostrable por resolución unitaria a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración por resolución unitaria de C a partir de S. Se representa por $S \vdash_{ResUni} C$.
- Prop.: (Adecuación) Sea S un conjunto de cláusulas.
  Si $S \vdash_{ResUni} \square$, entonces S es inconsistente.

Resolución unitaria

- Existen conjuntos de cláusulas S tales que S es inconsistente y $S \not\vdash_{ResUni} \square$.

  Dem.: $S = \{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$
- Def.: Una cláusula de Horn es un conjunto de literales con un literal positivo como máximo.
- Ejemplos: $\{p,\neg q,\neg r\}$, $\{p\}$ y $\{\neg p,\neg q\}$ son cláusulas de Horn.
  $\{p,q,\neg r\}$ y $\{p,r\}$ no son cláusulas de Horn.
- Prop.: Si S es un conjunto inconsistente de cláusulas de Horn, entonces $S \vdash_{ResUni} \square$.

Resolución por entradas

- Def.: Una demostración por resolución por entradas a partir de S es una demostración por resolución en la que en cada resolvente interviene una cláusula de S.
- La cláusula C es demostrable por resolución por entradas a partir del conjunto de cláusulas S si existe una demostración por resolución por entradas de C a partir de S. Se representa por $S \vdash_{ResEnt} C$.
- Prop.: (Adecuación) Sea S un conjunto de cláusulas. Si $S \vdash_{ResEnt} \square$, entonces S es inconsistente.
- Existen conjuntos de cláusulas S tales que S es inconsistente y $S \not\vdash_{ResEnt} \square$.

  Dem.: $S = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$
- Prop.: Si S es un conjunto inconsistente de cláusulas de Horn, entonces $S \vdash_{ResEnt} \square$.

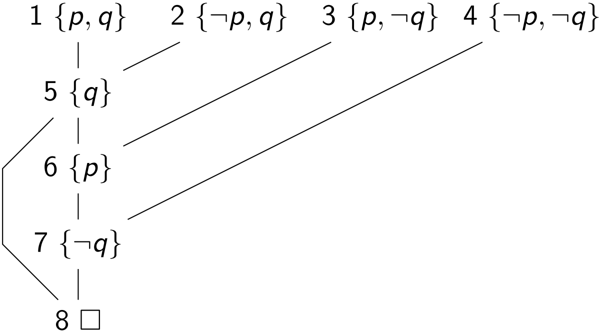
Resolución lineal

- Sea S un conjunto de cláusulas.
  - La sucesión $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ es una resolución lineal a partir de S si se cumplen las siguientes condiciones:
    1. $C_0 \in S$;
    2. para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, existe un $B \in S \cup \{C_0, \dots, C_{i-1}\}$ tal que $C_i \in Res(C_{i-1}, B)$.

    La cláusula C_0 se llama cláusula base, las C_i se llaman cláusulas centrales y las B se llaman cláusulas laterales.
  - La cláusula C es deducible por resolución lineal a partir de S si existe una deducción por resolución lineal a partir de S, $(C_0, \dots, C_n)$, tal que $C_n = C$. Se representa por $S \vdash_{ResLin} C$.
- Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas.
  - (Adecuación) Si $S \vdash_{ResLin} \square$, entonces S es inconsistente.
  - (Completitud) Si S es inconsistente, entonces $S \vdash_{ResLin} \square$.

Resolución lineal

- Ejemplo: Resolución lineal de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$



Tema 5: Resolución proposicional

Formalización de argumentación por resolución

- Problema de los animales: Se sabe que
  1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
  2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
  3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
  4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

  Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.
- Formalización:

$$\begin{array}{ll} \{ & \text{tiene\_pelos} \lor \text{da\_leche} \to \text{es\_mamífero}, \\ & \text{es\_mamífero} \land (\text{tiene\_pezuñas} \lor \text{rumia}) \to \text{es\_ungulado}, \\ & \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_cuello\_largo} \to \text{es\_jirafa}, \\ & \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \to \text{es\_cebra}, \\ & \text{tiene\_pelos} \land \text{tiene\_pezuñas} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \ \} \end{array}$$

$$\vdash_{Res} \text{es\_cebra}$$

Decisión de argumentación por resolución

1	{¬ tiene_pelos, es_mamífero}	Hipótesis
2	{¬ da_leche, es_mamífero}	Hipótesis
3	{¬es_mamífero, ¬tiene_pezuñas, es_ungulado}	Hipótesis
4	{¬es_mamífero, ¬rumia, es_ungulado}	Hipótesis
5	{¬es_ungulado, ¬tiene_cuello_largo, es_jirafa}	Hipótesis
6	{¬es_ungulado, ¬tiene_rayas_negras, es_cebra}	Hipótesis
7	{tiene_pelos}	Hipótesis
8	{tiene_pezuñas}	Hipótesis
9	{tiene_rayas_negras}	Hipótesis
10	{¬es_cebra}	Hipótesis
11	{es_mamífero}	Resolvente de 1 y 7
12	{¬tiene_pezuñas, es_ungulado}	Resolvente de 11 y 3
13	{es_ungulado}	Resolvente de 12 y 8
14	{¬tiene_rayas_negras, es_cebra}	Resolvente de 13 y 6
15	{es_cebra}	Resolvente de 14 y 9
16	$\square$	Resolvente de 15 y 10

Bibliografía

1. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001).

   Cap. 4: Propositional calculus: resolution and BDDs.

2. C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973).

   Cap. 5.2: The resolution principle for the proposicional logic.

3. N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001).

   Cap. 14: La resolución en el cálculo proposicional.

4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003).

   Cap. 5.7: El principio de resolución en lógica proposicional.

5. U. Schöning *Logic for Computer Scientists* (Birkäuser, 1989).

   Cap. 1.5: Resolution.